مكتبة قرطاج
Carthage
للنشر و التوزيع

Collection «Pilote»

MATHEMATIQUES

Algèbre & Géométrie

Section SCIENCES EXPERIMENTALES

Rappels de cours

Recueil d'exercices corrigés

Extraits de devoirs corrigés

3ème année

TOME 2

Elaboré par :

Lamloumi Maâmmar

Sommaire

Titre	Exercises	Solutions
Exemple d'étude de fonction	3	1
Fonctions trigonométriques	11	20
Suites réelles	20	39
limites de Suites réelles	27	50
Nombres complexes	38	68
vecteurs de l'espace	48	84
Produit scalaire et Produit vectoriel dans l'espace	52	87
Equations de droites et de plans	55	92
Dénombrement	64	117
STATISTIQUE	74	137
probabilités	77	145
Devoirs	88	157

INTRODUCTION

Ce manuel est destiné aux élèves de 3ème année secondaire **section sciences expérimentales**, il fait partie de la « **Collection Pilote** ».

Ce livre comporte :

- Des résumés de cours complets.
- Des QCM qui permettent à l'élève de faire son auto-évaluation.
- Des Vrai / Faux qui permettent l'apprentissage progressif des règles logiques.
- Des lectures graphiques.
- Des exercices et des problèmes permettant aux élèves d'assimiler le cours, d'approfondir leurs compréhensions des concepts mathématiques, d'apprendre des techniques et des astuces pour la résolution des problèmes. Ils sont organisés par ordre croissant de difficultés :
- Des devoirs de contrôle et de synthèse :En utilisant des procédés diversifiés de genre QCM, Vrai / Faux , tableaux à remplir, lectures graphiques, exercices intégratifs, ce livre permet aux élèves de viser la mention et une bonne préparation pour le bac et les grandes écoles supérieures (facultés de Mathématiques, circuit préparatoire, polytechniques, etc.....)Nous tenons à remercier vivement : nos familles pour leurs patience et monsieurs : nizar anter , Sami Aouaoui ,fadhel cherif , rabeh garbi et dorai abdelkarim pour leurs remarques et critiques.

Résumé du cours :

1)Eléments de symétries d'une courbe

Axe de symétrie :Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$. Soit f une fonction définie sur un ensemble D de courbe représentative C et Δ la droite d'équation $x = a$. La droite Δ est un axe de symétrie de C, si et seulement si, pour tout x appartient à D ; $2a - x$ appartient à D et $f(2a - x) = f(x)$

Centre de symétrie : Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$. Soit f une fonction définie sur un ensemble D de courbe représentative C et O' le point de coordonnées $(a;b)$. Le point O' est un centre de symétrie de C, si et seulement si, pour tout x appartient à D, $2a - x$ appartient à D et $f(2a - x) = 2b - f(x)$

2) Branche paraboliques

Fonction polynôme Soit f une fonction polynôme de degré n ; $n \geq 2$ alors $\frac{f(x)}{x}$ tend vers l'infini quand x tend vers l'infini. On dit que la courbe représentative C de f dans un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ admet une branche parabolique de direction $\left(O;\vec{j}\right)$, au voisinage de l'infini

Fonction $\sqrt{f}$:Soit la fonction $f : x \mapsto \sqrt{ax+b}$; $a \neq 0$ Alors $\frac{f(x)}{x}$ tend vers zéro quand x tend vers l'infini. On dit que la courbe représentative C de f dans un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ admet une **branche parabolique de direction** $\left(O;\vec{i}\right)$ au voisinage de l'infini.

3)Pan d'étude de fonctions Pour l'étude et la représentation graphique d'une fonction f :

- Déterminer son ensemble de définition.

Il est parfois possible de réduire l'ensemble d'étude de f à une partie de D, c'est le cas par exemple, si f est paire ou impaire, il suffirait d'étudier f pour les réels positifs de D.

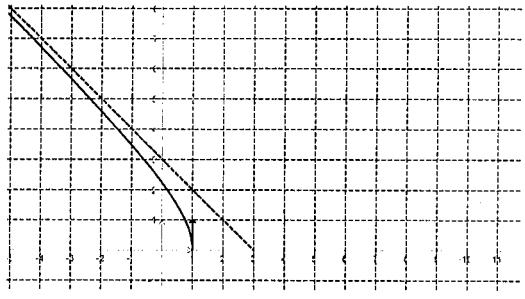
- Etudier la continuité et la dérivabilité de f et déterminer sa fonction dérivée ainsi que son signe.
- Dresser alors le tableau de variation de f en effectuant les études de limites nécessaires.
- Tracer la courbe représentative C de f dans un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ en étudiant éventuellement les asymptotes ou les branches paraboliques.

LES EXERCICES

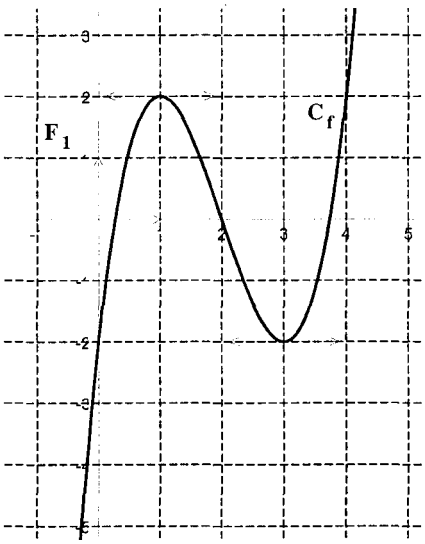
Exercice n°1: La courbe représentative ci-contre est celle d'une fonction f définie et dérivable sur qui admet $\Delta : x = 3$ comme axe de symétrie est partiellement tracé ci-contre.

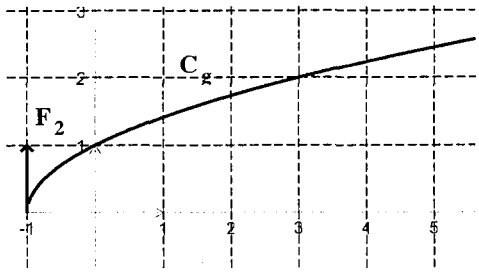
1) Achever la courbe.

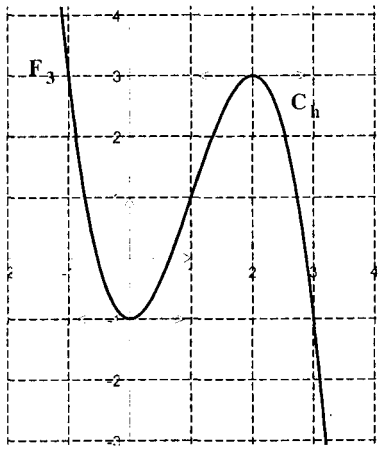
2) Déterminer la tableau de variation de f.



Exercice n°2: Les graphiques ci-contre représentent deux fonctions f et h définies et dérivable sur $\mathbb{R}$ et une fonction g définie et dérivable sur $]-1,+\infty[$.







I)1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=$ a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) 0 ; 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=$ a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) 0

II) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=$ a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) 0

III)1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{h(x)}{x}=$ a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) 0 , 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{h(x)}{x}=$ a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) 0

Exercice N°3 : Soit $f : IR \to IR$ tel que $x \mapsto -\dfrac{1}{2}x^3+\dfrac{3}{2}x-1$. On désigne par (ξ) sa courbe représentative dans plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Etudier les variations de f . 2) Montrer que $I(0;-1)$ est un centre de symétrie de (ξ)

3) a) Ecrire l'équation de la tangente T à (ξ) au point I.

b) Etudier la position de (ξ) par rapport à T ; c) Construire (ξ) et T.

4)a)Vérifier que $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{27}{16}$

b)En déduire les solutions dans $[-\pi;\pi]$ de l'équation : $\cos^3 x-3\cos x-\dfrac{11}{8}=0$

Exercice N° 4 : Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=2x^3-6x+4$. On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1)Dresser le tableau de variation de f

2)Montrer que le point $I(0;4)$ est un centre de symétrie pour la courbe (C_f).

3) Ecrire l'équation de la tangente T à (C_f) au point I.

4) Etudier la position relative de T et (C_f) ; 5) Construire T et (C_f)

6) Déterminer suivant le paramètre m le nombre de solutions de l'équation : $x^2-3=\dfrac{m-4}{2x}$

7) Soit α et β deux réels de l'intervalle $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ avec $\alpha<\beta$, comparer : $f(\cos\alpha)$ et $f(\cos\beta)$

8) Soit g la fonction définie sur IR par $g(x)=|2x+4|(x-1)^2$

a) Construire (C_g) à partie de (C_f) ; b) Dresser le tableau de variation de g

EXERCICE 5: Soit la fonction $f(x)=x^3-3x^2+2$

1) Etudier la fonction f et tracer sa courbe représentative (ζ) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

2) soit A et b deux points de (ζ) d'abscisses respectifs a et $-a$ avec $a\in IR^*$

a) Montrer qu'il existe deux points M' et M" de (ζ) où la tangente à (ζ) est parallèle à (AB)

b) Montrer que les points M' et M" restent symétriques par rapport à un point fixe I lorsque a varie dans IR^*

EXERCICE6 : Soit la fonction définie par $f(x)=x^3+6x^2+9x+4$; (ζ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. 1) Dresser le tableau de variation de f.

2) montrer que $I(-2;2)$ est un centre de symétrie de (ζ)

3) a) Ecrire l'équation de la tangente (T) à (ζ) au point I. ; b) Vérifier que $f(x)+3x+4=(x+2)^3$

c) Déduire la position de (ζ) par rapport à (T) ; d) Construire (T) et (ζ)

4) Soit A et B deux points de (ζ) d'abscisses respectifs a et b tels que $a+b=-4$. Montrer que les tangentes à (ζ) aux points A et B sont parallèles.

5) Soit $g(x)=(x+1)^2|x+4|$.a) utiliser (ζ) pour construire la courbe de g ; b) Dresser le tableau de variation de g

EXERCICE 7: I) Soit la fonction définie sur IR par $f(x)=x^3-6x^2+9x-2$; (ζ) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. 1) Etudier les variations de f.

2) Montrer que $I(2;0)$ est un centre de symétrie de (ζ)

3) Ecrire l'équation de la tangente (T) à (ζ) au point I et étudier la position de (ζ_f) et (T)

4) a)Tracer (ζ_f) et (T)

b) En déduire que l'équation $f(x)=0$ admet exactement trois solutions : $2;\alpha_1;\alpha_2$ et donner le signe de f.

5) Soit D_a la droite de coefficient a et passant par le point de (ζ) d'abscisse 0.

a) Donner une équation cartésienne de D_a

b) Déterminer a pour que D_a coupe (ζ) en deux point E et F autre que $A(0;-2)$

c) Lorsque D_a coupe (ζ) en E et F, déterminer l'ensemble ξ_a milieu de $[EF]$ lorsque a varie.

II) Soit g la fonction définie par $g(x)=\begin{cases} x^3-6x^2+9x-2 & \text{si } x\le 3 \\ (x-3)^2(x-6)-2 & \text{si } x>3 \end{cases}$ .1) Montrer que g est continue en 3.

2) Montrer que g est dérivable sur IR et calculer $g'(x)$.

3) Soit le point $G(3;-2)$ et (Γ) la représentation de g dans $(O;\vec{i};\vec{j})$. Montrer que G est un centre de symétrie de (Γ).

4) En déduire la représentation de (Γ)

EXERCICE 8 : Soit $f(x)=ax^3+bx^2+c$; (ζ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ .1)Déterminer a ; b et c sachant que : *f admet un extremum en 2 ;* (ζ_f) coupe $(O;\vec{i})$ au point d'abscisse -1 * (ζ_f) coupe $(O;\vec{j})$ au point d'ordonné 4.

2) On prend $a=1$; $b=-3$ et $c=4$. a) Dresser le tableau de variation de f .b) Calculer $f(-1)$

c) En déduire le signe de $f(x)$

3) Soit $g(x)=f(\sin x)$ .a) Montrer que $g(x)\ge 0 \quad \forall x\in IR$

b) Dresser le tableau de variation de g sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ .c) En déduire que $\forall x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$; $0\le g(x)\le 2$.

4) a) Déterminer (ζ_h) l'image de (ζ_f) par la symétrie orthogonale d'axe $\Delta : x=-\frac{1}{2}$

b) Soit $M(x;y)$ et $M'(x';y')$ deux points du plan ; Montrer que $M'=S_\Delta(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x'=-x-1 \\ y'=y \end{cases}$

c) Déterminer la fonction h dont la représentation graphique est (ζ_h)

EXERCICE 9: Soit la fonction définie par $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$

1)Montrer que pour tout $x\in IR\setminus\{1\}$; on a $f(x)=x+1+\frac{1}{x-1}$.

2)Donner l'équation de Δ l'asymptote oblique à (ζ)

3) Etudier la position de (ζ) et Δ ; 4) Etudier f et tracer (ζ) et Δ

5) Soit $A(1;2)$ et P un point variable de coordonnées $(\alpha;0)$; $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 1$. La droite (AP) coupe (Oy) en Q.

Montrer que l'aire du triangle OPQ est $\text{Aire}(\alpha) = \dfrac{\alpha^2}{|\alpha - 1|}$. 6) Soit la fonction $g(x) = A(x)$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de g ; b) Montrer que g est prolongeable par continuité en 0

c) Tracer la courbe de g dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

EXERCICE 10 : Soit la fonction définie sur $IR \setminus \{1\}$ par : $f(x) = \dfrac{-2x^2 - x + 1}{x - 1}$; (ζ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. 1) Ecrire f sous la forme $ax + b + \dfrac{c}{x-1}$ où a , b et c sont rois réels ; $a \neq 0$.

2) Etudier f et tracer sa courbe (ζ). 3) Soit la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{1 - x^2 - (x+1)|x|}{x - 1}$. On désigne par (ζ') la courbe de g dans $(O;\vec{i};\vec{j})$ a) Etudier la dérivabilité de g et calculer $g'(x)$;

b) Dresser le tableau de variation de g c) Etudier la position de (ζ) et (ζ') puis tracer (ζ')

EXERCICE 11 : Soit la fonction définie sur $IR \setminus \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{-x^2 + 4x - 7}{x - 1}$; ζ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a) Déterminer les réels a ; b et c tels que pour tout $x \in IR \setminus \{1\}$; On a : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$.

b) En déduire que (ζ) admet une asymptote oblique Δ 2) Dresser le tableau de variation de f.

3) Soit Δ' la deuxième asymptote de (ζ) et $\{I\} = \Delta \cap \Delta'$. a) Montrer que I est un centre de symétrie de (ζ)

b) Tracer Δ ; Δ' et. 4) Déterminer les points de (ζ) dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

5) Soit la fonction $g(x) = \dfrac{x^2 + 4|x| + 7}{1 + |x|}$ Déduire la construction de (ζ_g) en précisant les demi tangentes en 0.

EXERCICE 12 : Soit la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 5}{x - 1}$; ζ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.1) a) Vérifier que $f(x) = x - 1 + \dfrac{4}{x-1}$.

b) Déduire que (ζ) admet une asymptote oblique que l'on précisera.

2) Montrer que le point $I(1;0)$ est un centre de symétrie de (ζ)

3) Dresser le tableau de variation de f et tracer (ζ) 4) Soit la fonction $g(x)=|x-1|+\frac{4}{x-1}$.

a) Dresser le tableau de variation de g.

b) Montrer que (ζ_g) admet deux asymptotes obliques. c) tracer (ζ_g)

EXERCICE 13 : Soit la fonction définie sur $IR\setminus\{-4;0\}$ par $f(x)=\frac{-x^2-3x+2}{x^2+4x}$ et on désigne par (ζ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a) Déterminer les réels a ; b et c tels que pour tout $x\in IR\setminus\{-4;0\}$; On a $f(x)=a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x+4}$.

2) Etudier f et tracer (ζ).

3) Soit $m\in IR$, discuter suivant les valeurs de m le nombre de points d'intersection de (ζ) avec la droite d'équation $y=m$

4) a) Représenter la fonction $g(x)=f(-|x|)$. b) En déduire son tableau de variation

Exercice 14: On considère les fonctions : $f(x)=\frac{1}{3}\left(x^2+x+\frac{1}{x}\right)$; $g(x)=2x^3+x^2-1$.

1) Montrer que $\forall\ x\in IR$ on a : $f'(x)=\frac{1}{3x^2}g(x)$. 2) Dresser le tableau de variation de g.

3) En déduire que l'équation $g(x)=0$ admet dans IR une unique solution α dans $]0;1[$.

4) Dresser le tableau de variation de f.

5) On désigne par (ζ) la courbe de f dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ et soient les points I et J de (ζ) d'abscisses respectifs -1 et 1. a) Vérifier que (IJ) est tangente à (ζ) en J.

b) Déterminer une équation de la tangente (T) à (ζ) en I. c) Etudier la position de (ζ) par rapport à (T).

6)utiliser les résultats précédents pour construire la courbe (ζ) (On prendra $\frac{2}{3}$ comme valeur approchée de α)

EXERCICE 15 : I) Soit la fonction $f(x)=\frac{x^2-2x+5}{x-1}$; (ζ_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a) Vérifier que $f(x)=(x-1)+\frac{4}{x-1}$; b) En déduire que (ζ_f) admet une asymptote oblique.

2) Montrer que le point $I(1;0)$ est un centre de symétrie de (ζ_f).

3) Dresser le tableau de variations de f 4) Tracer (ζ_f).

5) Soit la fonction $H(x)=|x-1|+\dfrac{4}{x-1}$ .a) Dresser le tableau de variations de h

b) Montrer que (ζ_H) admet deux asymptotes obliques c) Tracer (ζ_h)

II)Soit $g(x)=\sqrt{x^2-4x+5}$ et (ζ_g) sa courbe dans le même repère.

1)Montrer que la droite $\Delta : x=2$ est un axe de symétrie de (ζ_g).

2)Montrer que la droite $D : y=-x+2$ est un asymptote oblique à (ζ_g).

3)Dresser la tableau de variations de g 4) Tracer (ζ_g)

III)Soit la fonction $k(x)=\begin{cases} f(x)-4 & \text{si } x>2 \\ g(x) & \text{si } x\le 2 \end{cases}$. 1)Etudier la continuité et la dérivabilité de k en 2.

2) Dresser le tableau de variation de k.

3) Soit $n\in IN$; Comparer $k\left(\dfrac{n^2+1}{n^2+2}\right)$ et $k\left(\dfrac{n^2+1}{n^2+2}\right)$. 4) Tracer (ζ_k) dans le même repère.

Exercice 16 : Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{-x^2+2x+3}{x-2}$.

1)a)Calculer f(0), $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)f(x)$.

b)En déduire les réels a, b et c tels que : $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-2}$ pour tout $x\in D_f$.

2) Montrer que I(2 ;-2) est un centre de symétrie pour la courbe ζ_f.

3) Montrer que la droite $\Delta : y=-x$ est une asymptote oblique à la courbe ζ_f.

4) Dresser le tableau de variation de f. 5) Tracer ζ_f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

6) On pose : $g(x)=|x|+\dfrac{3}{|x|-2}$ .a) Etudier la parité de g. b) Tracer la courbe ζ_g

7) Soit $D_k : y=k$ où $k\in\mathbb{R}$ .a)Montrer que pour tout réel k, la droite D_k coupe ζ_f en deux points M' et M''.
b)Déterminer l'ensemble des points $I=M'*M''$ lorsque k varie.

Exercice 17 : On considère la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{x^2-2x-2}{x^2+x+1}$. On désigne par (ζ_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. 1) Dresser le tableau de variation de f.

2)a)Ecrire l'équation de la tangente (T) à (ζ_f) au point d'abscisse 1.

b)Etudier la position de (ζ_f) par rapport à (T).

3)Tracer (T) puis (ζ_f).

4) Justifier graphiquement que pour tout réel m de]-2,+∞[, l'équation f(x) = x – m admet, dans $\mathbb{R}$, un solution unique.

5) Soit g la fonction définie par : $g(x)=\dfrac{x^2+2|x|-2}{x^2-|x|+1}$. a)Montrer que g est paire.

b)Tracer la courbe représentative de g à partir de (ζ_f).c)Justifier que g est dérivable en 0.

Exercice 18: Soit m un réel et f_m la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par : $f_m(x)=\dfrac{mx^2-3x+5-m}{x-1}$.

On désigne par ζ_{f_m} sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

I) 1) Montrer que toutes les courbes ζ_{f_m} passent par un point fixe que l'on précisera.

2) Etudier, suivant les valeurs de m, le sens de variations de f_m.

II) On prend m = 2 et on note $f(x)=f_2(x)$.

1) Dresser le tableau de variations de f.

2) a)Vérifier que : $f(x)=2x-1+\dfrac{2}{x-1}$.b)Montrer que ζ_f admet deux asymptotes que l'on précisera.

c)Montrer que I qui est l'intersection de deux asymptotes, est le centre de symétrie de la courbe ζ_f.

d)Ecrire une équation cartésienne de la courbe d f dans le repère $(I,\vec{u},\vec{j})$ où $\vec{u}$ est le vecteur directeur de l'asymptote oblique.

3) Construire la courbe de f dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

Exercice 19 :Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sqrt{x^2-2x+4}+x$

ζ_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$.Interpréter graphiquement.

2) Montrer que $\Delta : y=2x-1$ est un asymptote oblique à ζ_f au voisinage de $+\infty$

3)a)Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x\in\mathbb{R} : f'(x)>0$.b)Dresser le tableau de variation de f.

4) Tracer ζ_f et Δ

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\sqrt{x^2+3}+x$.a)Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R} : g(x)=f(x+1)-1$.

b) En déduire que ζ_g est l'image de ζ_f par une translation que l'on précisera.

EXERCICE 20 :1) Soit la fonction définie sur IR par $g(x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

a) Déterminer $g'(x)$ pour tout $x \in IR$ .b) Dresser le tableau de variations de g et préciser le signe de $g(x)$

2) Soit la fonction définie sur IR par $f(x) = x - 1 + \sqrt{1+x^2}$ et (ζ) sa courbe dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

a) Vérifier que pour tout $x \in IR$ On a $f'(x) = g(x)$. b) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et interpréter le résultat.

c) Dresser le tableau de variation de f.

3)a)Montrer que la droite $\Delta : y = 2x - 1$ est une asymptote oblique à (ζ) en $+\infty$.

b)Etudier la position relative de (ζ) et Δ

c) Ecrire une équation de la tangente (T) à (ζ) en 0 et étudier la position de (T) et (ζ) .d) Tracer (ζ) ; (T) et Δ

EXERCICE 21 : Soit la fonction définie sur IR par $f(x) = 2\sqrt{1+x^2} - x$

1) Montrer que $f(x) > 0$ pour tout $x \in IR$. 2) Etudier les variations de f.

3)a)Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - x \right]$; Conclure ;b)Montrer que la droite $\Delta : y = -3x$ est une asymptote à (ζ_f) en $-\infty$

c) Etudier la position de ζ_f par rapport à Δ et à la droite $D : y = x$ 4) Tracer Δ ; D et (ζ)

EXERCICE 22: On considère la fonction définie par $f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x + 1}$. On désigne par (ζ) sa courbe dans un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$ 1)Déterminer l'ensemble de définition de f.

2)Résoudre l'équation $f(x) = 0$, que peut-on déduire ?

3)a)Ecrire une équation de la tangente (T) à (ζ) au point d'abscisse 0. b) Déterminer $f(0,001)$

4)Soit $\Gamma = \zeta \cup S_{(O;\vec{i})}(\zeta)$ .a)Déterminer la nature de (Γ) ; b)Construire (Γ) puis (ζ)

Exercice 23: On donne la courbe représentative (C) d'une fonction f définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ dans repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .La tangente (T) à (C) au point I(-1, -2).

1)Déterminer, graphiquement :a)Le signe de f'(x) et le tableau de variation de f.

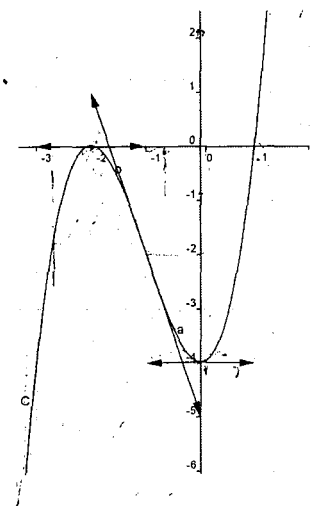
b) L'équation de la tangente (T). c) Le signe de f(x) sur $\mathbb{R}$.

d) Dresser le tableau de variation de la fonction $g : x \to f^2(x)$.

e) Tracer à partir de (C) la courbe (C') de la fonction $h : x \to |f(x)| - 1$.

f)Le nombre des solutions de l'équation h(x)=m+4, où m un réel.

2)On suppose que $f(x) = ax^3 + bx^2 - 4$, où a et b des réels, déterminer a et b.



Exercice 24 : Soit la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$; (ζ) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1)Déterminer l'ensemble de définition de f. 2) Etudier les variations de f

3) Montrer que la droite $\Delta : x = 2$ est un axe de symétrie de (ζ)

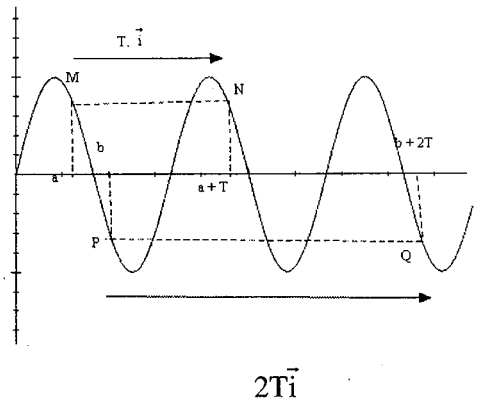
4) Montrer que la droite Δ' d'équation $\Delta' : y = x - 2$ est une asymptote oblique à (ζ) au voisinage de $+\infty$ .5) Tracer (ζ).

Résumé du cours :

Fonction périodique

Définition : Soit f une fonction définie sur une partie D de IR et T un réel non nul. On dit que f est périodique de période T, si pour tout $x \in D$; $(x+T)$ appartient à D et $f(x+T)=f(x)$

Construction Soit f une fonction définie dur D, périodique, de période T et g la restriction de f à un intervalle $[a;a+T]$. La courbe représentative de f se déduit à partir de celle de g par translation de vecteur $kT\vec{i}$, où k appartient à $\mathbb{Z}$.



Définition : Le plan est muni d'un repère orthonormé direct. Soit x un réel et M le point du cercle trigonométrique de coordonnées $(\cos x;\sin x)$. La fonction sinus est la fonction périodique, de période 2π, qui au réel x associe le réel $\sin x$. On la note $\sin : x \mapsto \sin x$

La fonction cosinus est la fonction périodique, de période 2π, qui au réel x associe le réel $\cos x$. On la note $\cos : x \mapsto \cos x$

Soit a un réel. Les fonctions, $x \mapsto \sin(x+a)$ et $x \mapsto \cos(x+a)$ sont périodiques, de période 2π

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$

Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur IR. De plus, pour tout $x \in IR$; On a : $(\sin)'(x)=\cos x$ et $(\cos)'(x)=-\sin x$

Fonction tangente

Définition : On appelle fonction tangente et on note tan la fonction : $x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x}$ La fonction tangente est impaire et périodique, de période π.

La fonction tangente est dérivable pour tout réel x, différent de $\frac{\pi}{2}+k\pi; k \in \mathbb{Z}$ et On a : $(\tan)'(x)=1+\tan^2 x$, pour tout x différent de $\frac{\pi}{2}+k\pi; k \in \mathbb{Z}$

Fonctions $f : x \mapsto \sin(\omega x+\varphi)$, $f : x \mapsto \sin(\omega x+\varphi)$

Soit ω et φ deux réels tels que : $\omega \neq 0$. Les fonctions $f : x \mapsto \sin(\omega x+\varphi)$ et $g : x \mapsto \cos(\omega x+\varphi)$ sont périodiques, de période $\frac{2\pi}{\omega}$. De plus, f et g sont dérivables sur IR et on a pour tout réel x, $f'(x)=\omega\cos(\omega x+\varphi)$ et $g'(x)=-\omega\sin(\omega x+\varphi)$.

LES EXERCICES

Exercice n°1 : Pour chacune des questions suivantes indiquées la bonne réponse :

1)Pour tout x, $\left|\cos x-\cos\frac{\pi}{4}\right|\leq$.....a) x-$\frac{\pi}{4}$ b) $\left|x-\frac{\pi}{4}\right|$ c) $\frac{\pi}{4}-x$

2) La fonction définie sur $\mathbb{R}$ $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}x-1\right)$ est périodique de période :

a) 2π b) 4 c) 2

3) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\sin(x)\cos(x)$. La fonction est périodique de période

a)2π ; b)π ; c)$-\pi$

4) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : f (x)=sin²(x). a) la fonction f périodique de période :

* $\frac{\pi}{4}$ ** π *** $\frac{\pi}{2}$

b) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$, f'(x) est égale à :

* cos² x **sin(2x) ***-2cosx sinx

c) La courbe représentative ς_f de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, admet :

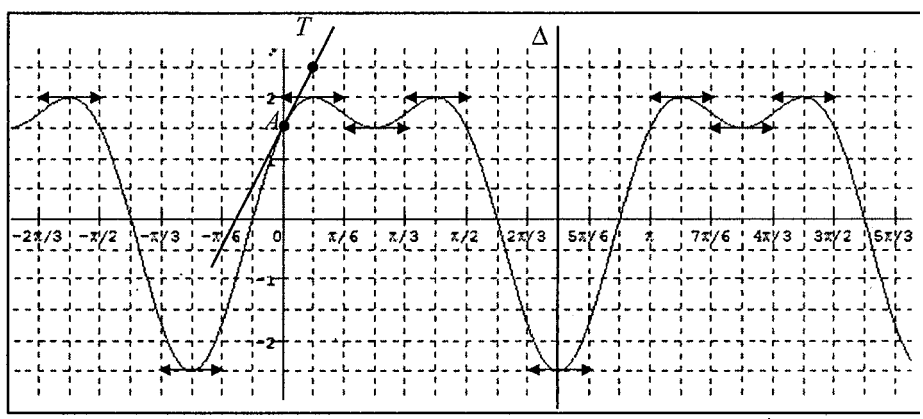
* un centre de symétrie I$(\frac{\pi}{2},1)$ ** Au point d'abscisse 0 une tangente d'équation y=x

***Un axe de symétrie d'équation : x=0

Exercice n°2 : Le graphique ci-contre représente une partie d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

On sait que :

- $\Delta : x=\frac{3\pi}{4}$ est un axe de symétrie pour la courbe ζ_f
- T la tangente à ζ_f au point A$\left(0,\frac{3}{2}\right)$.
- On note f′ la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.



Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.

Par lecture graphique :

1) a) $f\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)-f(x)=0$ b) $f\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)-f(x)=0$ c) $f\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)+f(x)=0$

2) a) $f'(0)=\frac{\pi}{12}$ b) $f'(0)=\frac{3}{2}$ c) $f'(0)=\frac{12}{\pi}$.

3) a) $f'\left(-\frac{\pi}{12}\right)=0$ b) $f'\left(-\frac{\pi}{4}\right)<f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ c) $f'(x)\geq 0$ sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{12}\right]$.

4) f est périodique de période : a) $\frac{\pi}{2}$ b) π c) 2π

5) $f\left(\frac{135\pi}{12}\right)=$ a) $\frac{3}{2}$ b) $-\frac{5}{2}$ c) 2

EXERCICE 3 :Calculer les limites suivantes : 1) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{x}$

2) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1-\cos x}{x\sin x}$, 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos^3 x+\sin^3 x-1}{x}$; 4) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\cos^3 x+\sin^3 x-1}{x-\pi}$;

5) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\frac{2\cos x-1}{x-\frac{\pi}{3}}$; 6) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\frac{2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)}{x-\frac{\pi}{6}}$; 7) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{\sqrt{2}\sin x-1}$

EXERCICE 4 :Calculer les limites suivantes :1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 3x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin x-\sin 2x}{2\sin x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}$;

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 5x}{2(1-\cos 5x)}$; 3) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2\sin\frac{1}{x}$; 4) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{1+\cos x}{(x-\pi)^2}$; 5) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\frac{\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x-1}{2\cos x-1}$;

6) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x+\cos x}{x+\frac{\pi}{4}}$; 7) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\tan 3x.\tan 2x$,8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin x(\cos 2x-\cos x)}$

Exercice 5 :Soit f la fonction définie sur $[0;2\pi]$ par : $f(x)=\frac{-2\sin x-1}{1-\sqrt{2}\cos x}$

1) déterminer le domaine de définition de f .2) Etudier le signe de $1-\sqrt{2}\cos x$ sur $[0;2\pi]$.

3) Résoudre dans $[0;2\pi]$ les inéquations suivantes : $*-2\sin x-1\geq 0$ $*f(x)\leq 0$

4) Calculer $\lim\limits_{x\mapsto\left(\frac{\pi}{4}\right)^-} f(x)$

Exercice 6 :Soit la fonction : $f : x\mapsto \sin 2x$

1) Etudier la fonction f et tracer sa courbe représentative ζ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2) Déduire la courbe représentative de la fonction $g : x\mapsto |\sin 2x|$.

3) Déterminer la période de g .

Exercice 7: Soit f la fonction par : $f(x)=2\cos(x)+\cos(2x)$. On note par ζ la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. 1) Etudier la parité de f puis vérifier qu'il suffit d'étudier f sur $[0,\pi]$.

2) Dresser le tableau d variation de f sur $[0,\pi]$.3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0,\pi]$ l'équation f(x) = -1.

4) Construire la partie de ζ dans l'intervalle $[-2\pi,2\pi]$. 5) Calculer : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-3}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-3}{x^2}$

Exercice 8 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2\sin^2 x + 4\sin x$ .On note ζ sa courbe dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Montrer que f est 2π périodique puis dresser son tableau de variation sur $[-\pi,\pi]$

2) Déterminer les points d'intersection de ζ et l'axe des abscisses.

3) Tracer la partie de ζ dans $[-2\pi;2\pi]$

4) Soit $g(x) = -2\sin^2 x + 4\sin x$. a) Calculer $g(x) + f(x+\pi)$.

b) En déduire une construction de ζ_g à partir de ζ puis tracer la partie de ζ_g sur $[-2\pi;2\pi]$.

Exercice 9 :

1) Soit f la fonction définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \cos^2 x + \cos^2(3x)$. Montrer que $f\left(\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\right) = [0;2]$

2) Soit g la fonction définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ par $g(x) = \cos x + \cos(3x)$

a) Montrer qu'il existe un réel $a \le 0$ tel que $g\left(\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\right) = [a;2]$

b) Montrer que $g\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \sin\frac{\pi}{8} - \cos\frac{\pi}{8}$; c) En déduire que $a \in \left[-1;-\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}\right]$

Exercice 10 : Soit la fonction : $f : x \mapsto \sqrt{3}\sin 2x - 2\sin^2 x + 1$

1) Montrer que pour tout réel x, $f(x) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

2) Etudier f et tracer sa courbe représentative (ζ) dans un plan rapporté a un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

3) Vérifier que les droites $(D_k : x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z})$ sont des axes de symétrie de la courbe (ζ).

4) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(f(x) = 1)$.

b) Résoudre graphiquement dans $[0,\pi]$, l'inéquation $(\sqrt{3}\sin 2x \ge 2\sin^2 x)$.

5) Soit la fonction $g : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$

$x \to \sqrt{3}\sin 2|x| - 2\sin^2 x + 1$ Tracer la courbe de g dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Exercice 11 : Soient les fonctions $f : x \mapsto 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ et $g : x \mapsto 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

1) Etudier chacune des fonctions f et g et tracer les courbes représentatives ζ et ζ' dans le plan rapporté à un repère orthogonale.

Vérifier que ζ' est l'image de ζ par une translation dont-on déterminera le vecteur.

2) Soit la fonction h définie sur $[0,2\pi]$ par : $h(x) = |\cos x| + \sqrt{3}|\sin x|$

Utiliser les courbes ζ et ζ' pour tracer la courbe représentative de h .

Exercice 12 : Soit la fonction définie par : $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x\sin x-2\cos x+2}{x^2(1-x)} & \text{si } x<0 \\ \dfrac{a+\cos\pi x}{1+\sin\pi x} & \text{si } 0\le x\le 1 \\ \dfrac{1+\cos\pi x}{\pi^2(1-x)}+bx & \text{si } x>1 \end{cases}$ où a et b sont deux réels.

1)Donner le domaine de définition de f. 2)Déterminer a et b pour que f soit continue en 0 et en 1.
Dans la suite on prend a = 1 et b = 0.
3)Montrer que f n'est pas dérivable en 1. 4)Calculer $f'(x)$ pour $x\in[0;1]$

Exercice 13 **:**Soit la fonction $f : IR \to IR$

$$x \to \sqrt{2+\cos x+\sqrt{3}\sin x}$$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

1)a) Montrer que f est définie sur IR et que $(\forall x\in IR)$; $f(x)=2\left|\cos(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6})\right|$

b) Montrer que f est périodique dont une période est 2π

c) Montrer que la droite Δ d'équation $x=\frac{\pi}{3}$ est un axe de symétrie puis en déduire que l'on peut étudier f sur l'intervalle $I=\left[\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right]$

2)a) Dresser le tableau de variation de f sur I.

b)tracer la courbe (C_1) de la restriction de f à l'intervalle $\left[-\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right]$

(On précisera les tangentes aux extrémités de (C_1))

3)a) Résoudre dans $\left[-\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right]$ l'équation :f(x)=1

b)Résoudre dans $\left[-\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right]$ l'inéquation : $1+\cos x+\sqrt{3}\sin x<0$

Exercice 14 : Soit f la fonction définie par : $f(x)=\cos x-\sin x$. On désigne par ζ_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. 1) a) Vérifier que tout réel x, on a : $f(x)=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

b) Montrer que le point $I\left(\frac{\pi}{4},0\right)$ est un centre de symétrie de ζ_f .

c) Montrer que l'étude de f peut être réduite sur $\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$ .d) Dresser le tableau de variation de f sur $\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$.

e) Tracer la branche de la courbe ζ_f correspondante à $\left[-\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$., en précisant les coordonnées des points

d'intersections avec l'axe des abscisses.

f) Déterminer le signe de f(x) sur $\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$.

2) Soit la fonction g définie par : $g(x)=\frac{\sin 2x}{\cos x+\sin x}$ .a) Déterminer D_g le domaine de définition de g.

b)Montrer que pour tout réel $x\in D_g$, on a : $g\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=g(x)$.

c)Montrer que l'étude de g peut être réduite sur $\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]\cap D_g$..

d) Montrer que pour tout réel $x\in D_g$, on a : $g(x)=\cos x+\sin x-\frac{1}{\cos x+\sin x}$.

e) Montrer que pour tout réel $x\in D_g$, on a : $g'(x)=\frac{2+\sin 2x}{(\cos x+\sin x)^2}-f(x)$

d) Dresser le tableau de variation de g sur $\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]\cap D_g$.

Exercice 15 : Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{1}{2}\sin(2x)-\sin x$.

1) Résoudre dans IR l'équation $2x^2-x-1=0$ puis factoriser $2x^2-x-1$.

2) En déduire la solution de l'équation $2\cos^2 x-\cos x-1=0$ dans l'intervalle $\left[-\frac{2\pi}{3};\frac{4\pi}{3}\right]$.

3) Etudier les variations de f sur $\left[-\frac{2\pi}{3};\frac{4\pi}{3}\right]$ et tracer sa courbe.

Exercice 16 : Soit la fonction définie sur $[-\pi;\pi]\setminus\{0\}$ par $f(x)=\frac{2}{1-\cos x}$. On désigne par ζ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Montrer que f est paire. 2)Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat.

3)a)Montrer que pour tout $x\in]0;\pi]$ on a $f'(x)=\frac{-2\sin x}{(1-\cos x)^2}$. b)Dresser le tableau de variation de f.

4)Tracer ζ

5) Soit la fonction g définie sur $[-\pi;\pi]\setminus\{0\}$ par $g(x)=\frac{1+\cos x}{1-\cos x}$.

a) Vérifier que pour tout $x\in]0;\pi]$ on a $g(x)=f(x)-1$. b) En déduire la représentation graphique de g.

Exercice 17 :Soit la fonction définie sur IR par : $f(x)=-\sin 2x+\sqrt{3}(1+\cos 2x)$.

1) Montrer que $\forall x\in$ IR on a $f(x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}$. 2) Calculer $f'(x)$

3)Calculer les limites suivantes: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-\sqrt{3}}{x}$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)}{x-\frac{\pi}{6}}$, $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}\dfrac{2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}}{2x+\pi}$

4)Etudier les variations de f sur $[0;\pi]$

5) Soit la fonction g définie sur $[0;\pi]$ par : $g(x)=\dfrac{L(x)}{f(x)}$ avec $L(x)=1+2\cos 2x$. Montrer que : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}g(x)=\sqrt{3}$

EXERCICE 18: Soit la fonction f définie sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x)=x\sin x+\cos x-1$.

1) Montrer que f est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ et que $f'(x)=x\cos x$

2) Dresser la tableau de variation de f.

3) a) Donner le signe de f sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$; b) En déduire que $x\sin x>1-\cos x$

4) Soit la fonction g définie sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ par : $g(x)=\dfrac{1-\cos x}{x}$ si $x\neq 0$ et $g(0)=0$

a) Montrer que g est continue en 0 ; b) Donner le domaine de continuité de g. c) Montrer que $g'(0)=\frac{1}{2}$

d) Dresser la tableau de variation de g . e) En déduire que pour tout $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ On a : $\cos x\geq 1-\frac{2x}{\pi}$

EXERCICE19 :Soit la fonction définie sur IR par : $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$

1) Etudier les variations de f sur $[0;\pi[$; 2) Construire la courbe de f.

3) En déduire la construction de la courbe de la fonction g définie sur $[-\pi;\pi]$ par

$g(x)=-2\sin\left(|x|+\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(|x|+\frac{\pi}{4}\right)$

EXERCICE 20 :Soit la fonction f définie par $f(x)=2\cos\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)$

1) Montrer que la droite $D: x=-\frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie à la courbe de f.

2) Montrer que le point $E\left(\frac{\pi}{2};0\right)$ est un centre de symétrie à la courbe de f.

3) Etudier les variations de f sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ et construire ζ_f.

Exercice 21 : Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=a\cos(2x)+b$ avec a et b des réels et (C) sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Le tableau de variation de f sur $\left[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$ est le suivant :1) Montrer que $a=2$ et que $b=1$

2) a) Résoudre dans $\left[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$ l'équation $f(x)=0$.

b) En déduire le signe de $f(x)$ sur $\left[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$

x	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1

3) a)Montrer que $I\left(\frac{\pi}{4};1\right)$ est un centre de symétrie de (C)

b) Montrer que l'étude de f se réduit à l'intervalle $\left[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$

c) Construire la portion (C_0) de (C) relative à $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$ en précisant les points de rencontre de (C_0) avec les axes de repère.

d) Soit g la fonction définie sur $\left[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$ par $g(x)=\left[f(x)\right]^2$ Dresser le tableau de variation de g.

Exercice 22 :Soit la fonction : $f : x \mapsto \tan(ax+b)$ où $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}$

On désigne par ζ la courbe représentative de f dans d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j})$ du plan.

1) Déterminer a et b pour que la période de f soit égale à 2π et que la courbe ζ passe par le point $I\left(\frac{4\pi}{3},0\right)$.

2) On prend $a=\frac{1}{2}$ et $b=\frac{\pi}{3}$ .a) Etudier la variation de f sur l'intervalle $\left]\frac{\pi}{3},\frac{7\pi}{3}\right[$. b) Tracer la courbe ζ.

Exercice 23 :le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j})$ Soit $A(1,0)$ et $B(0,1)$ deux points du cercle trigonométrique de centre O Soit θ un réel de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$,On désigne par M le point du cercle trigonométrique tel que $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}) \equiv \theta[2\pi]$ .1)a) Montrer que $AM=2\sin\frac{\theta}{2}$. b) Montrer que $BM=2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$

2) a) Montrer que la fonction f définie par : $f(x)=2\sin x+2\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$ est dérivable sur IR

b)Dresser la tableau de variation de f sur $\left]0,\frac{\pi}{4}\right[$ .c)En déduire la valeur de θ pour laquellé AM+BM est maximale .

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2f(x)++2\sqrt{2}-4}{2x-\pi}$.

Résumé du cours :

Définition : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique signifie qu'il existe un réel r tel que : pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}-u_n=r$ et r est la raison de la suite u

Terme Général : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r :

On a : $u_n=u_0+nr$; pour tout $n\in\mathbb{N}$

Relation entre deux termes quelconques : $u_n=u_p+(n-p)r$; pour tous entiers naturels n et p

Somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique :

Soit $S_n=u_0+u_1+u_2+\cdots\cdots\cdots+u_{n-1}$ alors on a : $S_n=\dfrac{n(u_0+u_{n-1})}{2}$

Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique :

Soit $S=u_p+u_{p+1}+\cdots\cdots\cdots+u_n$ $(p\le n)$ alors on a : $S=\dfrac{(n-p+1)(u_p+u_n)}{2}$

Conséquence : Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on a : $1+2+3+\cdots\cdots\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

Définition : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique signifie qu'il existe un réel q tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}=qu_n$, q est la raison de la suite u

Terme Général : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q

On a : $u_n=u_0.q^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

Relation entre deux termes quelconques : $u_n=u_m.q^{n-m}$; pour tous entiers naturels n et m

Relation entre trois termes consécutifs d'une suite géométrique :

a , b et c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique sig $a.c=b^2$

Somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique : Soit $S_n=u_0+u_1+u_2+\cdots\cdots\cdots+u_{n-1}$ On a

$$S_n=\begin{cases} n.u_0 & si\ q=1 \\ u_0\dfrac{1-q^n}{1-q} & si\ q\neq 1\end{cases}$$

Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique : Soit $S=u_p+u_{p+1}+\cdots\cdots\cdots+u_n$

$(p\le n)$, On a : $S=\begin{cases}(n-p+1)u_p & si\ q=1\\ u_p\dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q} & si\ q\neq 1\end{cases}$

Conséquence : Pour tout réel q on a : $1+q+q^2+q^3+\cdots\cdots\cdots+q^{n-1}=\begin{cases} n & si\ q=1\\ \dfrac{1-q^n}{1-q} & si\ q\neq 1\end{cases}$

Définition : Une suite numérique u est une fonction de IN dans IR, définie à partir d'un certain rang n, L'image $u(n)$ de l'entier n est noté u_n. Le terme u_{n_0} est le premier terme de la suite. Le terme u_n est le terme d'indice n de la suite.

Variation d'une suite Définition : Soit u une suite numérique définie pour tout entier $n \geq n_0 \geq 0$.

La suite (u_n) est dite croissante si $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout $n \geq n_0$. Dans ce cas les termes de la suite sont rangés dans l'ordre croissant : $u_{n_0} \leq u_{n_0+1} \leq ..... \leq u_n \leq u_{n+1} \leq ....$

La suite (u_n) est dite décroissante si $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \geq n_0$. Dans ce cas les termes de la suite sont rangés dans l'ordre croissant : $u_{n_0} \geq u_{n_0+1} \geq ..... \geq u_n \geq u_{n+1} \geq ....$

Définition : Soit (U_n) une suite numérique définie pour tout entier $n \geq p$.

La suite (U_n) est dite majorée s'il existe un réel M tel que pour tout $n \geq p ; U_n \leq M$

La suite (U_n) est dite minorée s'il existe un réel m tel que pour tout $n \geq p ; U_n \leq m$

La suite (U_n) est dite bornée lorsqu'elle est majorée et minorée

LES EXERCICES

EXERCICE 1 : Soit (U_n) la suite définie sur IN par $\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} - U_n = n+1 ; n \in IN \end{cases}$

1) a) Calculer U_1 et U_2 b) La suite (U_n) est-elle arithmétique ?

2) Soit (V_n) la suite définie sur IN par : $V_n = U_{n+1} - U_n ; n \in IN$

a) Montrer que (V_n) est arithmétique. ; b) Soit $S_n = V_0 + V_1 + ... + V_n$; Exprimer S_n en fonction de n.

3) Montrer que $S_n = 1 + U_{n+1}$; $n \in IN$

4) Exprimer U_n en fonction de n.

EXERCICE 2 : Soit (U_n) la suite définie sur IN par $\begin{cases} U_0 = 1 \ ; \ U_1 = 2 \\ U_{n+2} = 3U_{n+1} - 2U_n \end{cases}$.

1) Montrer que la suite (V_n) définie par $V_n = U_{n+1} - U_n$ est géométrique.

2) Exprimer V_n en fonction de n.

3) Calculer la somme suivante : $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} V_k$

4) Exprimer U_n en fonction de n.

EXERCICE 3 : Soit (U_n) la suite définie sur IN par $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2^n} + n \end{cases}$.

1) Exprimer en fonction de n la somme suivante : $\sum_{k=0}^{n-1} (U_{k+1} - U_K)$

2) En déduire l'expression de U_n en fonction de n.

EXERCICE 4 : Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$.

1) Vérifier que $\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}$. 2) Calculer S_n.

Exercice 5 : Soit $X \in IR \setminus \{1\}$ et (V_n) la suite définie sur IN par $V_n = X^n$.

1) Déterminer la nature de la suite V_n.

2) Calculer la somme suivante $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} V_k$. 3) Montrer que $2^n \geq n+1$.

Exercice 6 : 1)À partir d'un nombre donné, on construit une suite de nombres de la façon suivante : chaque nombre est la somme des carrés des chiffres du nombre précédent.
Ainsi, si le premier nombre est 2 332 011,
le deuxième nombre est $2^2+3^2+3^2+2^2+0^2+1^2+1^2=28$
le troisième nombre est $2^2+8^2=68$ et ainsi de suite.
Calculer le 2011ème nombre de cette suite.
2)Calculer le 2011ème nombre de la suite obtenue en partant du nombre 1248.

EXERCICE 7 : Soit $(U_n)_{n\in IN}$. la suite définie par $U_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}$

1)Calculer U_1 ; U_2 et U_3

2)a)Montrer que pour tout $k \in IN^* \setminus \{1\}$ On a : $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$

b) Montrer que pour tout $n \in IN^*$ On a : $U_n \leq 2 - \frac{1}{n}$

EXERCICE 8 : Soit $(U_n)_{n\in IN}$. la suite définie par $S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k = 2n^2 + n$; $n \in IN^*$

1) Exprimer U_n en fonction de n. 2) Déterminer la nature de la suite (U_n)

3) Soit (V_n) la suite définie sur IN^* par $\begin{cases} V_1 = \frac{1}{2} \\ V_{n+1} = \frac{V_n}{\sqrt{1+4V_n^2}} \end{cases}$

a) Montrer que ; $V_n > 0$. b) Montrer que pour tout entier $n \in IN^*$; $V_n^2 = \frac{1}{1+U_n}$

c) Exprimer V_n en fonction de n.

EXERCICE 9 : Soit (U_n) la suite définie sur IN par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{2+U_n} \end{cases}$

1)Montrer que pour tout $n \in IN$ On a : $0 < U_n < 2$

2)a)Montrer que pour tout $n \in IN$ On a : $2-U_{n+1} < \frac{1}{2}(2-U_n)$.b)En déduire que $0 < 2-U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

3)a)Montrer que $U_n = 2\cos\frac{\pi}{3.2^n}$. b)En déduire la valeur de $\cos\frac{\pi}{12}$.

Exercice 10 : Soit la fonction $f(x)=\frac{x}{3}-\frac{3}{x}$; $x \in]0;+\infty[$ et $g(x)=\frac{x^2}{2}-3x+1$

1) Etudier les variations de f sur $]0;+\infty[$ .2) La suite (U_n) définie sur IN^* par $U_n = f(n)$ est-elle monotone ?

3) a) Etudier les variations de g sur $]0;+\infty[$ b) La suite (V_n) définie sur IN^* par $V_n = g(n)$ est-elle monotone ?

Exercice 11 : $\begin{cases} U_0=1 \\ 3U_{n+1}=2U_n-\frac{n}{3^n} \end{cases}$

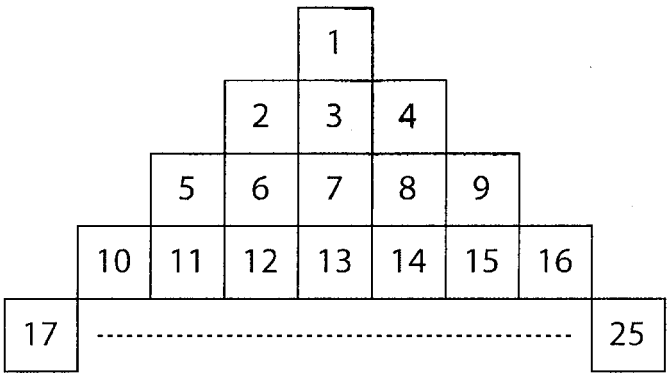
1)a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $U_n = \frac{n+1}{3^n}$.

b) Montrer que U est une suite décroissante.

2) On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n+1} U_k$; $n \in \mathbb{N}^*$.Montrer par récurrence que $S_n = \frac{9}{4}-\frac{2n+3}{4.3^{n-1}}$; $n \in \mathbb{N}^*$.

Vérifier que $S_n = \frac{9}{4}-\frac{3}{2}U_n-\frac{1}{4.3^{n-1}}$

EXERCICE 12 :



On écrit les entiers naturels comme indiqué sur le schéma ci dessus où on s'est arrêté à 25.

1)Quel sera l'entier écrit au bout de la 18ème ligne?

2)Sur quelle ligne est écrit 2 010?

EXERCICE 13 : 26 personnes dont les âges sont respectivement chacun des entiers compris entre 35 et 60 sont assises autour d'une table. Montrer qu'il existe 4 personnes assises côte à côte dont la somme des âges est inférieure ou égale à 190

EXERCICE 14: Abrar aime le café et se sert toujours une tasse de 200 mL.

Hier, elle a bu son café de la manière suivante : elle a bu la moitié de son café, puis le tiers de ce qu'il restait, puis le quart de ce qu'il restait, et ainsi de suite jusqu'à boire le centième de ce qu'il restait.

Aujourd'hui, le café est très chaud. Abrar boit le centième du café, puis le quatre-vingt-dix-neuvième de ce qu'il reste et ainsi de suite jusqu'à boire la moitié de ce qu'il reste.

1) Montrer qu'aujourd'hui, Abrar a bu 198 mL de café.

2) Déterminer la quantité de café qui restait dans la tasse hier, et démontrer que

$$\frac{1}{(1\times2)}+\frac{1}{(2\times3)}+\frac{1}{(3\times4)}+\ldots+\frac{1}{(99\times100)}=\frac{99}{100}.$$

3) Au lieu de boire $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{100}$ de son café, elle boit maintenant $\frac{1}{2^k}, \frac{1}{3^k}, \ldots, \frac{1}{100^k}$ où k est un entier naturel non nul. Quelle quantité a-t-elle but si k=2?

4) Au lieu de boire $\frac{1}{100}, \frac{1}{99}, \ldots, \frac{1}{2}$ de son café, elle boit maintenant $\frac{1}{100^k}, \frac{1}{99^k}, \ldots, \frac{1}{2^k}$ où k est un entier naturel non nul. Quelle quantité a-t-elle but si k=2?

5) Pour k quelconque, a-t-elle pu boire plus, moins ou autant de café si elle commence par boire $\frac{1}{2^k}$ ou $\frac{1}{100^k}$ de son café?

Exercice 15 : Les pages d'un livre sont numérotées de 1 à n (on rappelle que la page numérotée 1 est toujours une page de droite). On additionne les numéros de toutes les pages et on trouve un total égal à 2003. Mais deux pages numérotées sont restées collées et leurs numéros n'ont pas été comptés.
Quel est le nombre de pages du livre et les numéros des pages collées?

Exercice 16: U et V sont les suites définies sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 3 \\ V_0 = 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} U_{n+1} = \dfrac{9U_n + 2V_n}{10} \\ V_{n+1} = \dfrac{2U_n + 6V_n}{10} \end{cases}$

1)On pose que $W_n = U_n - 2V_n$ .a)Montrer que W est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

b)Calculer W_n en fonction de n puis $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n$.

2)a)Montrer que U est décroissante et V est croissante. b)Montrer que pour tout n$\in\mathbb{N}$ on a : $2 \le 2V_n \le U_n \le 3$.

Exercice 17: (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0=1 \\ U_{n+1}=\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{1-U_n^2}}{2}} \end{cases}$

1) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a : $0 \le U_n \le 1$. 2) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a: $U_n = \sin\frac{\pi}{2^{n+1}}$.

3) On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$. a) Montrer que (S_n) est croissante.

b) Montrer que $1 \le S_n \le \pi$ (on pourrait remarquer que : pour $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ on a $\sin x \le x$)

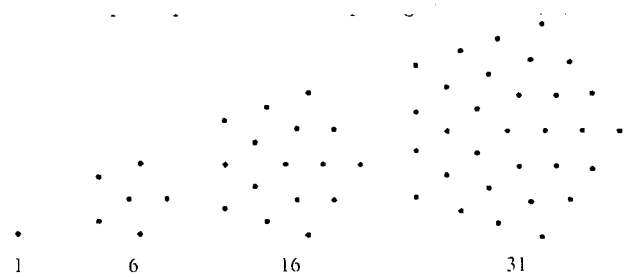
EXERCICE 18 : 1) Soit $n\in IN$; Soit $U_n = 3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ montrer que $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ est divisible par 11.

2) Soit $n \in IN$; montrer que $10^n - 1$ est divisible par 9

3) Soit $n \in IN$; montrer que $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

4) Soit a un entier naturel impair ; $n \geq 1$. Montrer que 2^{n+2} divise $a^{2^n} - 1$

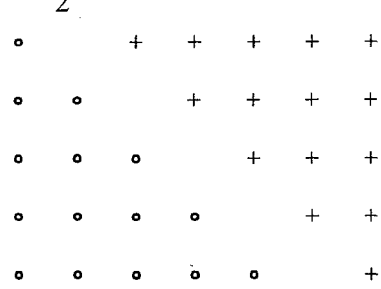
Exercice 19 : Un nombre pentagonal centré est un nombre qui peut être représenté par un pentagone ayant un point placé en sur centre et tous les autres point s disposés autour de ce centre en formant des couches pentagonales successives. Les quatre premiers nombres pentagonaux sont 1, 6, 16 et 31



1) a) Quel est le cinquième nombre pentagonal centré?

b)Combien de points faudra-t-il ajouter pour passer au sixième pentagone centré?

2) a)Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $1 + 2 + 3 + ... + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$ On pourra pour cela observer la figure ci-dessous



b)En déduire que les nombres pentagonaux centrés peuvent tous être écrits sous la forme $1 + \frac{5(n-1)n}{2}$ ou n est un entier naturel

c)2 176 est-il un nombre pentagonal centré? Indiquer la méthode utilisée pour répondre.

3)a)Quels sont les chiffres des unités possibles pour un nombre pentagonal?

b)Pour quelles valeurs de n le n ème nombre pentagonal est-il pair?

c)Quel est le chiffre des unités du 20 092 010 ème nombre pentagonal centré?

Exercice 20 : Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On considère la liste des entiers successifs de 1 à n [1,2,3,.. . ,n]. On lui applique les modifications successives suivantes

• on remplace son deuxième élément par la différence entre le 3éme et le 1ére éléments;

• on remplace son troisième élément par la différence entre le 4ème et le 2ème éléments; (Attention : le deuxième élément vient peut-être de changer!) • etc. jusqu'à l'avant dernier élément.• Et, enfin, on remplace le dernier par la différence entre le 1 et l'avant-dernier éléments.

On s'intéresse à la somme de tous les éléments à l'issue de l'opération, notée S_n.

1)Pour n =6, retrouver les étapes qui permettent d'obtenir S_6=9. 2)Déterminer, en détaillant, S_3, S_4, S_5,.

3)Etablir une conjecture pour S_{2010}. 4)Montrer que S_n est un carré parfait si et seulement si n est pair.

Exercice 21:

On considère la fonction f définie dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x+1) - 2(x+2) + 3(x+3) - 4(x+4) + \cdots + 2009(x+2009) - 2010(x+2010)$$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 0$.
2. Montrer que, pour tout entier relatif impair k, $f(k)$ est un entier multiple de 2010. Existe-t-il un entier k pour lequel $f(k) = 2\,010$?

Exercice 22 : U et V sont les suites définies par : $\begin{cases} U_0 = \cos\theta \\ V_0 = 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} U_{n+1} = \dfrac{U_n + V_n}{2} \\ V_{n+1} = \sqrt{U_{n+1} + V_n} \end{cases}$ (θ est un réel non nul donné, $\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$).

1)a) Calculer U_1, V_1, U_2 et V_2 en fonction θ. b) Montrer que pour tout n$\in \mathbb{N}$ on a : $0 \le U_n \le V_n$.

c) (U_n) est une suite croissante majorée par 1 et (V_n) est une suite décroissante minorée par 0 par

2) a)Montrer que pour tout n$\ge$2on a : $V_n = \cos(\frac{\theta}{2}) \times \cos(\frac{\theta}{2^2}) \times ... \times \cos(\frac{\theta}{2^n})$ et $U_n = V_n \times \cos(\frac{\theta}{2^n})$ $\quad 0 \le U_n \le 1$

b) Montrons par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ que $V_n = \dfrac{\sin\theta}{2^n \sin\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right)}$

Exrexercice 23 :maram joue avec la fonction calculatrice de son téléphone portable. Elle a remarqué qu'en effectuant des divisions, elle obtient en général des résultats avec des groupes de chiffres qui se répètent.

1)Elle effectue la division de 4 par 9, puis de 4 par 99 et de 4 par 999. Elle remarque des particularités et tape une division qui lui donne pour résultat 0,000300030003. . . Quelle division a-t-elle pu effectuer?

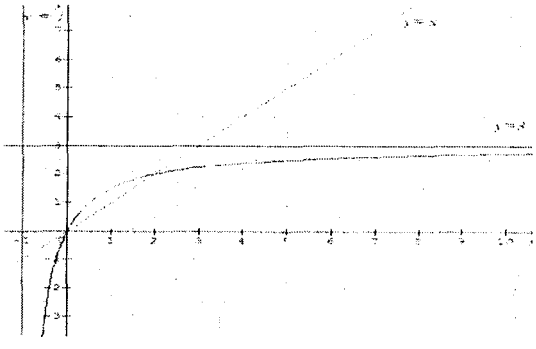
2)Tandis qu'elle essaye des divisions à trois chiffres, elle obtient le résultat 0,437437437. .., mais, interrompue par un coup de fil, elle ne souvient plus de la division qu'elle a effectuée. Quels sont les deux nombres qu'elle avait tapés?

3)En essayant ensuite avec des divisions de 4 chiffres par trois chiffres elle tombe sur 3,023232323. . . et est de nouveau interrompue par un coup de fil. Quelle division avait-elle effectué cette fois-ci?

4)En généralisant, peut-on dire que tout nombre ayant une écriture décimale périodique à partir d'un certain rang est un nombre rationnel? (Rappel : On appelle nombre rationnel, un nombre qui peut s'écrire comme le quotient de deux nombres entiers)

5)On souhaite étudier la réciproque de l'affirmation précédente. Justifier soigneusement que l'écriture décimale d'un nombre rationnel est périodique.

EXERCICE 24: La courbe représentative d'une fonction f est donnée par la figure suivante. Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_{n+1} = f(U_n)$ et du premier terme U_0. Répondre par Vrai ou faux : 1)On donne $U_0 = \dfrac{3}{2}$



a) $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \le U_n \le 2$. b) (U_n) est décroissante.

2)On donne $U_0 = 3$. a) (U_n) est minorée. b) (U_n) est décroissante.

Résumé du cours

1)Suite convergente

Définition : Soit (u_n) une suite numérique définie pour tout $n \geq p$.On dit que la suite (u_n) converge vers un nombre réel L si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel N tel que :si $n \geq N$ alors : $|u_n - L| < \varepsilon$.

Théorème : Une suite (u_n) converge vers un réel L, alors ce réel est unique.

Conséquence : Une suite (u_n) converge vers un nombre réel L si et seulement si la suite $(|u_n - L|)$ converge vers zéro.

Théorème : Soit une suite (u_n) converge vers un réel L non nul. Alors il existe un entier p tel que : pour tout $n \geq p$, $u_n \neq 0$ $u_n \neq 0$.

2)Limite infinie d'une Suite

Définition : Soit (u_n) une suite numérique définie pour tout $n \geq p$. On dit que la suite (u_n) tend $+\infty$ si pour tout $A > 0$, il existe un entier naturel N tel que :si $n \geq N$ alors : $u_n > A$.

On dit que la suite (u_n) tend $-\infty$ si pour tout $A < 0$, il existe un entier naturel N tel que :si $n \geq N$ alors : $u_n < A$.

Si une suite (u_n) tend $+\infty$ on écrit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, Si une suite (u_n) tend $-\infty$ on écrit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

3)Limite par comparaison

Théorème : Soit deux suites réelles (u_n) et (v_n) On suppose qu'il existe un entier N tel que $0 \leq |u_n| \leq v_n$; $n \geq N$ si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

Théorème : Soit deux suites réelles (u_n) et (v_n).

- S'il existe une entier N_0 tel que $u_n \leq v_n$; $n \geq N$ et si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \to \infty} v_n = +\infty$
- S'il existe une entier N_0 tel que $u_n \leq v_n$; $n \geq N$ et si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = -\infty$

4)Opérations sur les limites de suites :

$\lim\limits_{n \to \infty} u_n$	$\lim\limits_{n \to \infty} v_n$	$\lim\limits_{n \to \infty} (u_n + v_n)$
a	b	a+b
$+\infty$	b	$+\infty$
$-\infty$	b	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$

$\lim\limits_{n \to \infty} u_n$	$\lim\limits_{n \to \infty} v_n$	$\lim\limits_{n \to \infty} (u_n \times v_n)$
a	b	a b
∞	$b \neq 0$	∞ (on applique le règle des signes)
∞	∞	∞ (on applique le règle des signes)

$\lim\limits_{n \to \infty} u_n$	$\lim\limits_{n \to \infty} v_n$	$\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{u_n}{v_n}\right)$
a	$b \neq 0$	$\frac{a}{b}$
∞	$b \neq 0$	∞ (on applique le règle des signes)
$-\infty$	b	$-\infty$
a	$+\infty$	0
a	$-\infty$	0
$a \neq 0$	0	∞ (on applique le règle des signes)

Théorème : Soit (u_n) une suite géométrique définie par : $u_n = q^n$; $n \geq 0$; où q est un réel non nul.

- Si $q > 1$; alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
- Si $|q| < 1$; alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$
- Si $q \leq -1$; alors la suite (u_n) n'a pas de limite.
- Si $q = 1$; alors la suite (u_n) est constante.

LES EXERCICES

Exercice 1: Cocher la réponse exacte :

1) Soit (U_n) la suite définie sur IN par $U_n = (-0.8)^n$ alors :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$; b) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1$; U_n n'a pas de limite

2) Soit deux suites réelles U et V tels que : $U_n \leq V_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$ alors :

a) V est convergente vers L ; b) $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty$; c) $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = -\infty$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\cos n}{n}\right) =$ a) $+\infty$; b) 0 ; c) n'a pas de limite

4) Soit la suite U_n définie sur IR par $U_n = \dfrac{(\sqrt{2})^n}{10^3}$ alors :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$; b) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$; c) n'a pas de limite

5) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3^n + 2^n}{3^n - 2^n}$ est : a) $+\infty$; b) 1 ; c) n'admet pas de limite.

6) Soit (U_n) la suite définie sur IN par $U_n = \dfrac{3^n}{(-7)^{n+1}}$

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \dfrac{-3}{7}$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$ c) n'admet pas de limite

7) Soit (U_n) la suite définie sur IN^* et vérifiant $\forall n \in IN^*; 1 - \dfrac{1}{n} \leq U_n \leq 1 - \dfrac{1}{n+1}$ alors la suite (U_n) est :

a) croissante ; b) décroissante ; c) ni croissante ni décroissante.

8) Si $U_n = 1 - 2 + 4 + ... + (-1)^n 2^n ; \forall n \in IN$ alors :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \dfrac{1}{3}$; b) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty$; c) U_n n'a pas de limite.

9) Soit (U_n) la suite définie sur IN, on suppose que $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} U_k$ est convergente alors

a) (S_n) est croissante b) (S_n) est décroissante c) (U_n) converge

10) Soit (U_n) la suite définie sur IN par : $U_n = \dfrac{2+(-3)^n}{1+5(-3)^n}$

a) (U_n) admet une limite fine ; b) (U_n) admet une limite infinie c) (U_n) n'admet pas de limite

11) soit la suite (U_n) tel que pour tout entier naturel $n \geq 3$, on a : $U_n = \dfrac{(-1)^n \sin(n)}{A_n^3}$

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$ c) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$ d) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ n'existe pas

12) Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_n = \dfrac{C_n^0}{2^0} + \dfrac{C_n^1}{2^1} + \dfrac{C_n^2}{2^2} + \ldots + \dfrac{C_n^n}{2^n}$

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$ c) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$ d) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ n'existe pas

Exercice N° 2 :

1) Soit (U_n) la suite définie par $U_n = \dfrac{2+4+\ldots+2n}{1+3+\ldots+(2n+1)}$; $n \geq 1$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1$

2) Soit (V_n) la suite définie par $V_n = \dfrac{1+2+2^2+\ldots+2^n}{1+3+3^2+\ldots+3^n}$; $n \geq 0$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$

Exercice 3 **:** On considère la suite (U_n) définie par $U_n = \dfrac{1!+2!+3!+\ldots+n!}{(n+1)!}$; $n \geq 2$.

1) Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 2$, $1!+2!+3!+\ldots+(n+1)! \leq n!$

2)a) Montrer que, pour tout $n \geq 2$, $U_n \leq \dfrac{2}{n+2}$. b) En déduire que (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 4 **:** Soit (V_n) la suite définie par $\begin{cases} V_0 = 1 \\ V_{n+1} = \dfrac{n+1}{n^2} V_n, n \geq 1 \end{cases}$

1)a) Calculer V_2 et V_3. b) Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $V_n = \dfrac{n}{(n-1)!}$

2)a) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $\dfrac{V_{n+1}}{V_n} \leq \dfrac{3}{4}$. b) En déduire que pour tout $n \geq 2$, $V_n \leq \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-2} V_2$.

c) Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$.

Exercice 5: Soit (U_n) la suite définie sur IN par $U_n = \dfrac{10^n}{n!}$.

1) Calculer U_1 et U_2.

2)a)Montrer que pour tout $n \in$ IN on a : $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \dfrac{10}{n+1}$.

b)En déduire que la suite (U_n) est décroissante à partir d'un certain rang.

3) a) Montrer que pour tout $n \geq 10$ on a : $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{10}{11}$

b) En déduire que $\forall n \geq 10$ On a : $U_n \leq U_{10} \cdot \left(\frac{10}{11}\right)^{n-10}$ .c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

Exercice 6 : On considère la suite (u_n) définie par: $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{2+2u_n}$ pour tout $n \geq 0$.

1. Calculer u_1 et u_2
2. Soit n un entier naturel. Montrer que : si $u_n > 0$ alors $u_{n+1} > 0$. En déduire que pour tout entier naturel n, on a: $u_n \neq -1$ et $u_n \neq 0$.
3. Montrer que la suite (u_n) est décroissante. Montrer que la suite (u_n) est bornée.
4. On pose $v_n = \frac{1}{u_n} + 2$ pour tout entier naturel n. Calculer v_0, v_1 et v_2.
5. Justifier que $v_n \neq 2$ pour tout entier naturel n et montrer que : $u_n = \frac{1}{v_n - 2}$
6. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 2.
7. Exprimer u_n en fonction de n puis déterminer la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 7 : Soit (U_n) la suite définie sur IN^* par $U_n = \frac{n}{3^n}$

1) a) Montrer que pour tout $n \in IN^*$ on a $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{2}{3}$; b) En déduire que la suite (U_n) est décroissante.

c) Montrer que $\forall n \in IN^*$ on a : $U_n \leq 3\left(\frac{2}{3}\right)^n$; d) Monter que la suite (U_n) est convergente.

2) Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k$. Montrer que (S_n) est croissante et majorée par 2.

EXERCICE 8 : Soit (U_n) la suite définie sur IN par $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{2}{\sqrt{4 - U_n^2}} \end{cases}$; $n \in IN$

1) Montrer par récurrence que : $0 < U_n < \sqrt{2}$

2) a) Calculer $U_{n+1}^2 - U_n^2$ en fonction de U_n . b) En déduire que pour tout $n \in IN$ on a : $U_{n+1} > U_n$.

3) Soit la suite (V_n) définie par $V_n = \frac{2+U_n^2}{2-U_n^2}$ .a) Montrer que (V_n) est une suite arithmétique.

b) Exprimer V_n en fonction de n. c) En déduire que $U_n = \sqrt{\frac{2n}{n+1}}$.

4) Calculer $S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(kU_{k-1}^2\right)$.

5) a) Montrer que pour tout $n \in IN$ on a : $\left|U_n - \sqrt{2}\right| < \frac{2}{n+1}$. b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

EXERCICE 9 : Soit (U_n) la suite définie sur IN^* par $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{2U_n - 16}{U_n - 6} \end{cases}$

1) a) Calculer U_1 et U_2 b) Vérifier que la suite (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique

2) Montrer que pour tout $n \in IN$; $U_n < 4$

3) Déduire que la suite (U_n) est croissante

4) Soit la suite (V_n) définie par $V_n = \frac{1}{U_n - 4}$

a) Montrer que la suite (V_n) est arithmétique . b) Exprimer (V_n) puis (U_n) en fonction de n.

c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

EXERCICE 10 : Soit (U_n) la suite définie sur IN^* par $\begin{cases} U_1 = \frac{6}{5} \\ U_{n+1} = \frac{1}{5}U_n + \frac{4}{5} \end{cases}$; $\forall n \in IN^*$

1) Calculer les cinq premiers termes de la suite.

2) Montrer que pour tout $n \in IN^*$; $U_n > 1$

3) Montrer que la suite (U_n) est décroissante

4) Montrer que la suite (V_n) définie sur $V_n = U_n - 1$ est géométrique.

5) a) Montrer que la suite (V_n) converge vers 0 et en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$ b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

EXERCICE 11 : Soit (U_n) la suite définie sur IN par $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{2 - U_n} \end{cases}$

1) Montrer que pour tout $n \in IN$ On a : $0 < U_n \leq \frac{1}{2}$

2) a) Montrer que pour tout $n \in IN$ On a : $U_{n+1} \leq \frac{2}{3}U_n$. b) En déduire que (U_n) est décroissante

3) a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in IN$ On a : $U_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n U_0$

b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

4) Soit la suite (V_n) définie sur IN par $V_n = \frac{1}{U_n} - 1$

a) Montrer que la suite (V_n) est géométrique b) Exprimer (U_n) en fonction de n.

5) Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{U_k}$ .a) Exprimer S_n en fonction de n. b) Calculer $\lim_{n \to +\infty} S_n$

Exercice 12: Soit la fonction définie sur]-3, +∞ [par : $f(x) = \frac{4x+2}{x+3}$.

1) Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative (ζ_f) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2) Soit U la suite définie par $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = f(U_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

a) Montrer que pour tout entier n, on a : $0 \leq U_n \leq 2$ .b) Montrer que U est croissante.

3) Pour tout entier n, on pose : $V_n = \frac{U_n - 2}{U_n + 1}$.

a) Montrer que V est une suite géométrique que l'on caractérisera.

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n. c)Calculer la limite de V et celle de U.

4) Soit g une fonction périodique de période 5, définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant : pour $x \in \left[-\frac{1}{2}, 2\right]$, g(x) = f(x) et la droite d'équation : x = 2 est un axe de symétrie de (ζ_g). Construire la partie de (ζ_g) dans [-3,7] dans le même repère que (ζ_f).

Exercice 13 : Toutes les heures, on injecte une même dose de 1.8 unité d'une substance médicamenteuse dans le sang.les injections sont faites par piqure intraveineuse. On suppose que la substance se repartit instantanément dans le sang et qu'elle est ensuite progressivement éliminée. En une heure, la quantité de cette substance présente dans le sang diminue de 30%.

La première heure, se fait a l'instant $t = 0$ .Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note Q_n la quantité de substance présente dans le sang à l'instant t=n (en heure)des que la nouvelle injection est faite.

1)a) Justifier que $Q_1 = 1.8 + (0.7).(1.8)$ b) Exprimer Q_2 en fonction de Q_1 puis calculer Q_2.

2)a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer Q_{n+1} en fonction Q_n.

b) Déterminer une fonction f définie sur $\Re_+$ tels que $Q_{n+1} = f(Q_n), n \geq 1$

c) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution α que l'on déterminera.

3) Soit (T_n) la suite définie par $T_n = Q_n - \alpha, n \geq 1$

a)Montrer que (T_n) est une suite géométrique. b) En déduire que $Q_n = 6\left(1 - (0.7)^{n+1}\right), n \geq 1$.

4) Donner une approximation de la quantité de substance présente dans le sang à l'instant $t = 5$.

5) Déterminer $\lim_{n \to +\infty} Q_n$.

EXERCICE 14 : Soit (U_n) la suite définie sur IN par $\begin{cases} U_0 \in IR^* \\ U_{n+1} = \dfrac{2U_n}{\sqrt{3+U_n^2}} \end{cases}$.

1) Montrer que pour tout $n \in IN$ On a : $U_n > 0$

2) Pour quelle valeur de U_0 la suite (U_n) est-elle constante ?

3) On prend dans la suite $U_0 \neq 1$

a) Montrer que $U_{n+1} - 1$ et $U_n - 1$ ont le même signe. b) Etudier le signe de $U_{n+1} - U_n$; $U_0 \in]1;+\infty[$.

4) On prend $U_0 = 2$.

a) Soit la suite (V_n) définie par $V_n = \dfrac{U_n^2 - 1}{U_n^2}$. Montrer que (V_n) est géométrique.

b) Exprimer U_n en fonction de n. c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

EXERCICE 15 : Soit (U_n) la suite définie sur IN par $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n + 2}{\sqrt{U_n^2 + 8}} \end{cases}$; $n \in IN$

1) a) Montrer que pour tout $n \in IN$ On a : $0 \leq U_n < 1$

b) Montrer que pour tout $n \in IN$ On a : $U_{n+1} \geq \dfrac{U_n + 2}{3}$. c) En déduire que (U_n) est croissante .

2) a) Montrer que pour tout $n \in IN$ On a : $1 - U_{n+1} \leq \dfrac{1}{3}(1 - U_n)$

b) En déduire que pour tout $n \in IN$ On a : $1 - U_n \leq \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

3) Soit $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} U_k$.

a) Montrer que pour tout $n \in IN^*$ On a : $S_n \geq n - \dfrac{3}{2}\left(1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right)$ b) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

EXERCICE 16: Soit (U_n) la suite définie sur IN^* par $U_n = \dfrac{n}{n^2} + \dfrac{n}{n^2+1} + \dfrac{n}{n^2+2} + ... + \dfrac{n}{n^2+2n+1}$.

1) a) Montrer que $\forall n \in IN^*$; $\dfrac{2n}{n+1} \leq U_n \leq \dfrac{2n+2}{n}$.

b) En déduire que la suite est convergente et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

2) Montrer que $\forall n \geq 1$; $\dfrac{1}{2n} \leq \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$; en déduire $\forall n \geq 1$; $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + ... + \dfrac{1}{n} \leq 2\sqrt{n}$.

3) Soit la suite (S_n) définie par $S_n = U_1 + U_2 + ... + U_n$.

a) Montrer que $\forall n \in IN^*$; $2n-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+.....+\frac{1}{n+1}\right) \leq S_n \leq 2n+2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+.....+\frac{1}{n}\right)$.

b) En déduire que $\forall n \in IN^*$; $2n-4\sqrt{n+1} \leq S_n \leq 2n+4\sqrt{n}$ .c) calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n}$.

Exercice 17 : Soit (U_n) la suite définie par $U_n = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}; n \geq 1$

1) a) Montrer que pour tout $n \geq 1; U_n \geq \sqrt{n}$; b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

2) Soit (V_n) la suite définie par $V_n = 2U_{2n} - U_n; n \geq 1$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty$

Exercice 18 : $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{n^2+k}}; n \in \mathbb{N}$

1) Calculer U_1 et U_2.

2)a) Montrer $U_n \geq \frac{1+2+...+n}{\sqrt{n^2+n}}$.

b) En remarquant que $1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$.

3)a) Donner un encadrement de $\frac{1}{n}U_n$ .b) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left[\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{2}{\sqrt{n^2+1}}+...+\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\right] = \frac{1}{2}$.

Exercice 19 : 1) Soit (a_n) la suite telle que $a_n = (n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^n; n \geq 1$.

a) Montrer que pour entier $n \geq 1; a_{n+1} \leq \frac{2}{3}a_n$

b) En déduire que pour tout $n \geq 1$; $a_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

2) Soit (U_n) la suite définie sur IN^* par $U_n = 1+\frac{2}{3}+\frac{3}{3^2}+...+\frac{n}{3^{n-1}}$.

a) Soit $f : x \mapsto 1+x+x^2+...+x^n$. Montrer que $U_n = f'\left(\frac{1}{3}\right)$

b) Montrer que (U_n) est convergente et préciser sa limite.

Exercice 20 **:** Le plan est munie d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.On donne $A(1,-1)$ et $B(5,3)$.

On considère la suite de point (G_n) définie par $G_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$, G_n est le barycentre des points pondères $(G_{n-1}, 2)$, $(A,1)$ et $(B,1)$ .On note (X_n, Y_n) les coordonnées de G_n.

1)a)Calculer les coordonnées des points G_1, G_2 et G_3.b) Placer ces points et montrer qu'ils sont alignés.

2) Montrer que, pour tout $n \geq 0, G_{n+1}$ est limage de G_n par une homothétie que l'on caractérisera par son centre et son rapport.

3) Vérifier que, pour tout $n \geq 0, X_{n+1} = \frac{1}{2}X_n + \frac{3}{2}$.

4)a)Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 2$, $X_n \frac{3}{2} + \frac{3}{2^2} + ... + \frac{3}{2^n}$

b) En déduire une expression simple de X_n . c)Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} X_n$.

Exercice 21 :1) Soit (a_n) la suite définie par $a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}; n \geq 1$.

a) Montrer que pour tout $n \geq 1; \frac{1}{2} \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} \leq \frac{n}{n+1}$ .b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$

2) a) Montrer que pour tout réel x de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]; \sin x \leq x$

b) En déduire que pour tout réel x de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]; 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x$

3) Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right); n \geq 1$. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 1$

Exercice 22: Soit x un nombre réel positif ou nul et k un entier strictement supérieur à x.

1) Montrer par récurrence sur n que pour $n \geq k$ on a : $\frac{k^n}{n!} \leq \frac{k^k}{k!}$

2)En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à k, on a : $\frac{x^n}{n!} \leq \left(\frac{x}{k}\right)^n \frac{k^k}{k!}$ .3)Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$

Exercice 23:1)Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a : $\frac{n^{n-1}}{n!} \geq 1$.2)En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^n}{n!}$

Exercice 24 : Soit U_n la suite définie par : $\begin{cases} U_0 \in \mathbb{N} \\ U_{n+1} = U_n^2 + 2U_n \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$

1) Déterminer les valeurs de U_0 pour que la suite soit constante.

2) On suppose que $U_0 > 0$. a) Montrer que : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $U_n > 0$.

b) Montrer que la suite (U_n) est croissante .En déduire que $U_{n+1} \geq U_n(U_0 + 2)$ puis montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$

3) Soit $U_0 \in \mathbb{R}$. On définit la suite $V_n = 1 + U_n$.

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} = V_n^{\ 2}$. En déduire par récurrence que $V_n = (1 + U_0)^{2^n}$.

Vérifier alors que $U_n = (1 + U_0)^{2^n} - 1$.

b)Montrer l'équivalence suivante:U converge si seulement si $-2 < U_0 \leq 0$ si (U_n) converge calculer sa limite.

4) On prend $U_0 = 1$, on considère la suite $t_n = \frac{1}{1 + U_n}$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} t_k$; $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que $0 \le t_n \le \frac{1}{2^n}$. b) Montrer que (S_n) est croissante et $1 \le S_n \le 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$

En déduire que S_n est convergente et donner en encadrement de sa limite.

Exercice 25 : Soit U la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{\sqrt{3U_n+1}} \end{cases}$ et f : $\left]-\frac{1}{3}, +\infty\right[\to \mathbb{R}$, $x \to f(x) = \frac{x}{\sqrt{3x+1}}$.

1)a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$; $0 \le U_n \le 1$, b) Montrer que la suite U est décroissante.

2)a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $f(\frac{1}{n}) \le \frac{1}{n+1}$, b) montrer par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}^*; U_n \le \frac{1}{n+1}$ puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

3)a) Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\varphi(x) = \frac{3}{1+\sqrt{3x+1}}$, monter que φ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et vérifier que: $\frac{1}{U_{n+1}} - \frac{1}{U_n} = \varphi(U_n); \forall n \in \mathbb{N}$, En déduire que $\varphi(\frac{1}{n+1}) \le \frac{1}{U_{n+1}} - \frac{1}{U_n} \le \frac{3}{2}$.

b) En remarquant que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\sqrt{\frac{n+4}{n+1}} \le \frac{n+4}{n+1}$, montrer que $\varphi(\frac{1}{n+1}) \ge \frac{3(n+1)}{2n+5}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

c) Montrer alors que : $\forall n \in \mathbb{N}$ $\frac{3}{2} - \frac{6}{n+1} \le \frac{1}{U_{n+1}} - \frac{1}{n} \le \frac{3}{2}$.

4) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\frac{3n}{2} - (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}) \le \frac{1}{U_n} - 1 \le \frac{3n}{2}$.

5)a) Montrer que $\forall n \ge 1$; $\frac{1}{2n} \le \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$, en déduire que pour tout n, $n \ge 1$ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} \le 2\sqrt{n}$.

b) Montrer que alors que $\forall n \ge 1$ $\frac{3}{2}n - 12\sqrt{n} \le \frac{1}{U_n} - 1 \le \frac{3}{2}n$, en déduire la $\lim\limits_{n \to +\infty} nU_n$.

6) On note $W_n = \frac{1}{n^2}(\frac{1}{U_0} + \frac{1}{U_1} + ... + \frac{1}{U_n})$; $n \in \mathbb{N}^*$

a) montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\frac{1}{U_{n+1}^2} - 1 = 3(\frac{1}{U_0} + \frac{1}{U_1} + ... + \frac{1}{U_n})$ puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} W_n$.

Exercice 26: I- Soit f la fonction définie sur $]-2, +\infty[$ par: $f(x) = 2 - \frac{3}{x+2}$.

1)a)Etudier le sens de variation de f sur $]-2, +\infty[$. b)En déduire que pour tout réel x de [1, 2] on a : $1 \le f(x) < 2$.

2) Montrer que pour tout réel x de $[1, +\infty[$ $f(x) \le x$.

II- soit (U_n) la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$; $U_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = 2 - \frac{3}{U_n + 2}$.

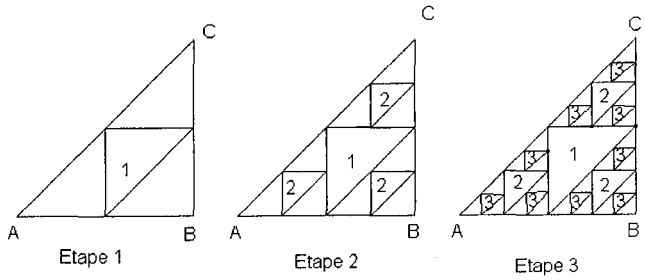
1)a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $1 \le U_n \le 2$. b) Montrer que (U_n) est décroissante.

2)Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = \dfrac{U_n - 1}{U_n + 1}$. a)Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$.

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction n. c) Calculer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

3)a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_n - 1| \leq 3V_n$. b) retrouver $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

Exercice 27 : On considère un triangle ABC rectangle en B tel que $BC = 4$. On divise ce rectangle en quatre triangles isocèles obtenus en joignant les milieux des cotés et on numérote 1 le triangle central (Etape 1). Chacun des triangles non numérotés est alors divisé en quatre triangles isocèles rectangles obtenus comme précédemment et on numérote 2 le triangle central(Etape 2) et ainsi de suite :



1) Pour tout entier non nul, on désigne par T_n le nombre de triangles numérotés n à l'étape n.

a) Déterminer T_1 ; T_2 T_3 et T_4 ; b) Exprimer T_{n+1} en fonction de T_n ; c) Exprimer T_n en fonction de n

2) Pour tout entier non nul, on désigne par α_n l'aire d'un triangle numéroté n à l'étape n

a) Déterminer α_1 ; α_2 α_3 et α_4 ; b) Exprimer α_{n+1} en fonction de α_n ; c) Exprimer α_n en fonction de n

3) pour tout entier non nul, on pose $S_n = T_1 \times \alpha_1 + T_2 \times \alpha_2 + \ldots + T_n \times \alpha_n$ .a) Interpréter géométriquement S_n

b) Montrer que pour tout entier non nul n ; $S_n = 8\left(1 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^n\right)$; c) Calculer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

Exercice 28: Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x+2}{x+3}$

I/1)a dresser le tableau de variation de f.

b)En déduire que pour tous entiers naturels k et n tel que $0 \leq k \leq n$, $f(n) \leq f(k+1) \leq f(2n)$.

2) Soit (S_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $S_n = \dfrac{1}{n+1}(f(n) + f(n+1) + \ldots f(2n))$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) \leq S_n \leq f(2n)$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|S_n - 2| \leq \dfrac{4}{n+3}$ puis déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

II)Soit (U_n) la suite définie par sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} U_0 = \dfrac{1}{2} \\ U_{n+1} = f(U_n), n \in \mathbb{N} \end{cases}$ 1)Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq U_n \leq 1$.

2)a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_{n+1} - 1| \leq \dfrac{1}{3}|U_n - 1|$ .b)Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$|U_n - 1| \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ .3)Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S'_n = U_0 + U_1 + \ldots + U_n$. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} S'_n$.

RESUME DU COURS

Théorème et définition :Il existe un ensemble appelé ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$ et vérifiant les propriétés suivantes :

1) l'ensemble $\mathbb{C}$ contient l'ensembles des nombres réels $\mathbb{R}$.

2) il existe un élément de $\mathbb{C}$, noté i, tel que $i^2 = -1$.

3) l'ensemble $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui vérifient les mêmes propriétés que l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$.

4) tout élément de $\mathbb{C}$ s'écrit de façon unique sous la forme $z = ai + b$, où a et b sont des réels.

Théorème :Soit $z = ai + b$ et $z' = a' + ib'$ (a , b , a' , b') sont des réels. Alors :

* $z = z' \Rightarrow a = a'$ et $b = b'$
* $z = 0 \Rightarrow a = b = 0$
* z est réel $\Rightarrow b = 0$
* z est imaginaire $\Rightarrow a = 0$

Propriétés :Pour tous nombres complexes z et z', $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$; $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$; $\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$ $n \in \mathbb{N}^*$

Pour tous nombres complexes z et tous nombres complexes z' non nul , $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$; $\overline{\left(\frac{1}{z'^n}\right)} = \frac{1}{(\overline{z'})^n}$; $n \in \mathbb{Z}$

$z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$; $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$; $z\overline{z} = (\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2$

$z = \overline{z}$, si et seulement si z est réel

$z = -\overline{z}$, si et seulement si z est imaginaire

théorème :Soit deux nombres complexes z et z'. $|z| = 0$, si et seulement si, $z = 0$; $|z + z'| \leq |z| + |z'|$;

$|kz| = |k||z|$; $k \in \mathbb{R}$; $|zz'| \leq |z||z'|$; $|\overline{z}| = |z|$; $|z|^2 = z\overline{z}$; $|z^n| = |z|^n$; $n \in \mathbb{N}^*$; $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}, z \neq 0$;

$\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}, z \neq 0$; $\left|\frac{1}{z^n}\right| = \frac{1}{|z|^n}, z \neq 0$ et $n \in \mathbb{Z}$

Propriétés :Soit z un nombre complexe non nul et k un réel non nul. $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z)[2\pi]$;

$\arg(-z) \equiv \pi + \arg(z)[2\pi]$

Si $k > 0$ alors $\arg(kz) \equiv \arg(z)[2\pi]$; si $k < 0$ alors $\arg(kz) \equiv \pi + \arg(z)[2\pi]$

Théorème :Soit z un nombre complexe non nul tel que $\arg(z) \equiv \theta[2\pi]$ Alors $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ Cette écriture est appelée écriture trigonométrique de z.

Si M est l'image de z dans un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ alors M appartient au cercle de centre O et de rayon $|z|$ et à la demi droite $[OB)$ telle que $\left(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{OB}}\right)\equiv\theta[2\pi]$

Théorème :Soit z un nombre complexe non nul tel que $z=a+ib$; a et $b\in\mathbb{R}$ Alors $\arg(z)\equiv\theta[2\pi]$, si et seulement si, $\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\theta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Propriétés :Soit deux nombres complexes non nul z et z'.

$\arg(zz')\equiv\arg(z)+\arg(z')[2\pi]$; $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right)\equiv-\arg(z)[2\pi]$; $\arg\left(\dfrac{z'}{z}\right)\equiv\arg(z')-\arg(z)[2\pi]$;

$\arg\left(z^n\right)\equiv n\arg(z)[2\pi], n\in\mathbb{Z}$. Pour tout nombre complexe non nul z , $z^n=|z|^n(\cos\theta+i\sin\theta)$, la formule précédente est appelée formule de Moivre.

Théorème :Le plan est muni d' un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$. Soit A , B , C et D les points d'affixes respectives tels que $AB\neq0$ et $CD\neq0$. Alors

$\left(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{AB}}\right)\equiv\arg(z_B-z_A)[2\pi]$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}}\right)\equiv\arg\left(\dfrac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)[2\pi]$

Théorème : $\dfrac{z_D-z_C}{z_B-z_A}=\dfrac{CD}{AB}(\cos\theta+i\sin\theta)$ avec $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}}\right)\equiv\theta[2\pi]$

Théorème :Soit a , b et c des nombres complexes tels que $a\neq0$. L'équation $az^2+bz+c=0$ admet dans $\mathbb{C}$, deux solutions (éventuellement confondues) définies par : $z_1=\dfrac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2=\dfrac{-b-\delta}{2a}$ où δ est une racine carrée du discriminant $\Delta=b^2-4ac$

Théorème :Si z_1 et z_2 sont les solutions de l'équation $az^2+bz+c=0$, $a\neq0$; alors

$az^2+bz+c=a(z-z_1)(z-z_2)$; $z_1+z_2=-\dfrac{b}{a}$ et $z_1z_2=\dfrac{c}{a}$

LES EXERCICES

Exercice n°1 : **I)** La forme algébrique du nombre complexe $z=\dfrac{(2-i)(1+3i)}{-2+3i}$

a) $\dfrac{5}{13}-i\dfrac{25}{13}$ b) $\dfrac{5}{13}+i\dfrac{25}{13}$ c) $-\dfrac{5}{13}+i\dfrac{25}{13}$

II) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$ On donne les points $A(i)$; $B(-4-i)$ et $C(-2+5i)$

1) Le triangle ABC est a) équilatéral b) isocèle en B c) rectangle et isocèle en A

2) L'ensemble $\Delta=\{M(z);|z-1|=|z+4+i|\}$ est :

a) Le cercle de diamètre [AB] b) la droite (AB) c) la médiatrice du segment [AB]

III) Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z^2-4)(z^2+9)=0$

a) $\{2,-2,3,-3\}$ b) $\{2,-2,3i,-3i\}$ c) $\{2i,-2i,3,-3\}$

Exercice N°2 : 1) Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse :

1) i^{1010} est égal à 1

2) Pour tous nombres complexes z et z' ; $(z^2+z'^2=0)$ si et seulement si $(z=z'=0)$

3) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soit ξ le cercle de centre O et de rayon 1 On désigne par M et M' les points d'affixes respectives z et $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$; si $M\in\xi$ alors $M'\in\xi$

4) a) $\left|\frac{222+222i}{222-222i}\right|=1$

5) Si $z=2\left(\sin\frac{\pi}{6}+i\cos\frac{\pi}{6}\right)$ alors $\arg(z)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$

6) Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes tels que $z_1^2+z_2^2=0$ alors $z_1=z_2=0$

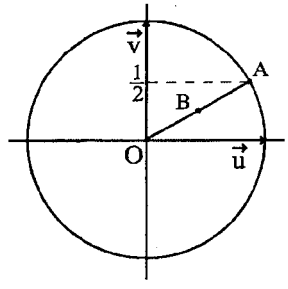
7) La forme trigonométrique du nombre complexe $1+i\tan\frac{3\pi}{5}$ est $\frac{1}{\cos\frac{2\pi}{5}}\left(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}\right)$.

8) Pour tout nombre complexe non nul z et pour tout réel θ, si $\arg(z)\equiv\theta[2\pi]$ alors $\arg(\frac{1}{2}z)\equiv\frac{\theta}{2}[2\pi]$.

9) Pour tout nombre complexe non nul Z, le nombre complexe $\frac{1}{Z}-\frac{1}{\overline{Z}}$ est imaginaire.

10) Dans la figure ci-contre, $(O,\vec{U},\vec{V})$ est un repère orthonormé direct du plan et A est un point du cercle trigonométrique d'ordonnée $\frac{1}{2}$

Si B est le milieu du segment [OA] alors l'affixe du point B est $\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{4}i$



Exercice N°3 :Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$ on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 1+i$; $z_B = -1+2i$ et $z_C = -i$.

1) Placer les points A, B et C.
2) Calculer AB, AC et BC. En déduire la nature du triangle ABC.
3) Déterminer l'affixe du point D tel que ABDC soit un parallélogramme.
4) On pose $E = \{M(z) \in P; |z+i| = 2\}$ et $F = \{M(z) \in P; |2iz+2i+4| = 2|z+i|\}$.

a) Déterminer l'ensemble E.

b) Montrer que F est la médiatrice de $[BC]$.

5) Soit l'application $f : P\setminus\{A\} \to P$ qui pour tout point $M(z) \mapsto M'(z')$ tel que $z' = \dfrac{z+1-2i}{z-1-i}$; $z \neq 1+i$.

a) Montrer que $f(C) = A$; b) Montrer que $(z'-1)(z-1-i) = 2-i$

c) En déduire que si $M \in \zeta_{(A;1)}$ alors M' appartient à un cercle ζ' que l'on précisera.

d) Montrer que si $M \in \text{méd}([AB])$ alors M' appartient à un cercle ζ'' que l'on précisera.

Exercice N°4: Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$ On considère les points A, M' et M" d'affixes respectives i ; $i+m$; $i-m$.

a) Vérifier que A est le milieu du segment $[M'M"]$

b) Montrer que le triangle $OM'M"$ est isocèle.

c) Déterminer les valeurs de m pour que le triangle $OM'M"$ soit équilatéral.

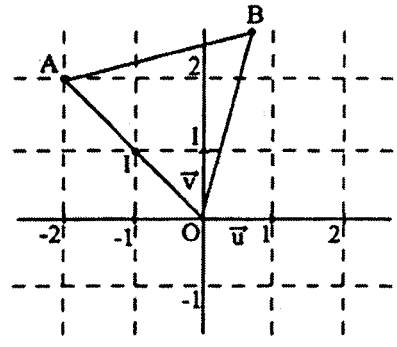
Exercice N°5: Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes d est un nombre complexe donné de module 2. dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$ On considère les points A, B, M et N d'affixes respectifs $2i$; $-i$; $-i+d$; $-i-d$. a) Calculer MN et déterminer le milieu de $[MN]$

b) En déduire que lorsque d varie, les points M et N appartiennent à un cercle fixe que l'on précisera.

c) Dans le cas où AMN est un triangle, montrer que O est le centre de gravité du triangle AMN.

d) En déduire les valeurs de d pour les quelles le triangle AMN est isocèle de sommet principal A.

Exercice N° 6: Dans le graphique ci-contre, le triangle OAB est équilatéral.



1) Déterminer l'affixe du point I milieu de $[OA]$.

2) On désigne par $a+ib$ l'affixe de B.

a) Montrer que $a^2+b^2 = 8$;

b) Déterminer en fonction de a et b l'affixe du vecteur $\overrightarrow{BI}$.

c) Calculer en fonction de a et b, le produit scalaire $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{OA}$.

d) En déduire l'affixe du point B.

3) Déterminer l'affixe du point C pour que OABC soit un losange.

4) On désigne par ξ l'ensemble des points M d'affixe z tel que $|iz+1+i|=\sqrt{2}$.

a) Montrer que ξ est un cercle que l'on caractérisera.

b) On note $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ les aires respectives de ξ et du losange OABC. Comparer $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$.

Exercice N°7 :Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$.

I) Soit le nombre complexe $z_1=1+2i$.

1) Calculer les nombres complexes suivants : $z_2=iz_1$ et $z_3=iz_2$.

2) a) Placer les points $M_1;M_2$ et M_3 d'affixes respectives z_1 ; z_2 et z_3.

b) Montrer que le triangle $M_1M_2M_3$ est isocèle et rectangle en M_2.

c) Déterminer le nombre complexe z_4 du point M_4 pour que $M_1M_2M_3M_4$ soit un carré.

II) A tout nombre complexe $z\neq -3$ on associe le nombre complexe z' définie par $z'=\dfrac{z-2i}{z+3}$.

1) On suppose que $z=z_1$, déterminer l'écriture cartésienne de z'

2) Déterminer l'ensemble suivant $E=\{M(z)$ tel que $z'\in IR\}$.

Exercice N°8 :Soit dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$ les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A=2+2i$; $z_B=4i$; $z_C=\dfrac{z_B}{z_A}$.et $z_D=z_B\times z_C$ soit $I=O*B$ et $K=O*D$.

1) Montrer que le triangle OAB est isocèle rectangle

2) a) Mettre z_C sous forme algébrique ;

b) Montrer que $C=A*O$

c) Soit $E=\{M(z)\in P$ tel que : $|z-2-2i|=|z|\}$. Déterminer E et montrer que E et parallèle à (AB)

3) a) Déterminer z_D ; b) Montrer que OABD est un trapèze.

4) Soit $F=\{M(z)\in P$ tel que : $|z-2i|=2\}$

a) Vérifier que $K\in F$; b) Déterminer F ; c) Vérifier que OABK est un carré

Exercice N°9:

Soit $(O;\vec{u};\vec{v})$: un repère orthonormé direct du plan complexe, soient les points A, B et C d'affixes respectives $z_A=2i$; $z_B=2+4i$ et. $z_C=3+i$

A) 1) Montrer que le triangle ABC est isocèle en C.

2) Soit $D=S_{(AB)}(C)$ et $I=A*B$.

a) Déterminer l'affixe du point I .b) Montrer que ACBD est un parallélogramme.

B) Soit $z\in\mathbb{C}$, on pose $z'=iz+2$.

1) Mettre z' sous forme algébrique dans chacun des cas suivants :a) $z=2+i$; b) $z=\dfrac{1}{1+i}$.

2) Déterminer les ensembles suivants : $E=\{M(z)\in P / z'\in IR\}$ et $F=\{M(z)\in P / |z'|=3\}$

3) a) Vérifier que : $z'=\frac{-3i}{z} \Leftrightarrow (z-i)^2=-4$. b) Déterminer alors les complexes z vérifiant $z'=\frac{-3i}{z}$.

EXERCICE N°10: Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé droit $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points $A(1+i)$; $B(3+i)$; $C(2+2i)$ et $D(2i)$.

1) a) Placer les points A ; B ; C et D. b) Montrer que ABCD est un parallélogramme

2) a) On pose $z_E = z_D - z_A$, donner la forme trigonométrique de z_E.

b) On pose $z_F = 2\left(\cos(-\frac{\pi}{3})+i\sin(-\frac{\pi}{3})\right)$, donner la forme trigonométrique de $\frac{z_E}{z_F}$.

c) En déduire $\cos\frac{13\pi}{12}$ et $\sin\frac{13\pi}{12}$ d) Calculer $\left(\frac{z_E}{z_F}\right)^{12}$

Exercice N°11 :

1) a) Développer $(z+6i)^2-12$; $z\in\mathbb{C}$. b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2+12iz-48=0$.

2) Soit $z_1=1+i\sqrt{3}$; $z_2=1+i$

a) Mettre z_1 et z_2 sous forme trigonométrique. ; b) Mettre $\frac{z_1}{z_2}$ sous forme algébrique et trigonométrique.

c) Déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

Exercice N° 12: Soit les nombres complexes suivants: $z_1=-\sqrt{2}+i\sqrt{6}$; $z_2=3\sqrt{2}-3\sqrt{2}i$ et $z_3=\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$.

1) Déterminer l'écriture trigonométrique de z_1 ; z_2 et z_3.

2) En déduire l'écriture trigonométrique du nombre complexe $U=\frac{z_1\times z_2}{z_3}$.

3) Déterminer l'écriture algébrique de U.

4) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$

Exercice n°13 : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. On désigne par A et B les points d'affixes respectives a = -2i et b = 3 – 2i.

A tout point M du plan d'affixes z, on associe le point M' d'affixe $z'=-2\overline{z}+2i$.

1) a) Déterminer a' et b' des points A' et B' associes respectivement aux points A et B.

b) Montrer que, si M est un point de la droite D : y = -2 alors M' est aussi un point de D.

2) Démontrer que pour tout point M d'affixes z on a : $|z'+2i| = 2|z+2i|$. Interpréter géométriquement cette égalité.

3) Pour tout point M distinct de A, on désigne par θ un argument de $z+2i$.

a) Montrer que $(z+2i)(z'+2i)$ est un réel négatif non nul.

b) En déduire un argument de $z'+2i$ en fonction de θ.

c) En déduire que les demi-droites [AM) et $[AM')$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

4) On suppose que : $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, en utilisant les résultats précédents, construire le point M' à partir du point M.

Exercice n°14 : Dans Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On donne les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 1 - i\sqrt{3}$, $z_B = 2$ et $z_C = 1 + i\sqrt{3}$.

1) Donner la forme trigonométrique de z_A et z_C. Placer les points A, B et C.

2) Déterminer la nature du quadrilatère OABC.

3) Soit (Δ) l'ensemble des points M(z) tels que $z + \overline{z} - 2 = 0$.

a) Vérifier que A et C sont deux points de (A). b) Déterminer et construire l'ensemble (Δ).

4) A tout point M d'affixe z tel que $z \neq 2$, on associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = \frac{4}{2-z}$.

a) Déterminer le point A' associé à A et le point C' associé à C.

b) Prouver que pour tout nombre complexe $z \neq 2$, $|z'-2| = \frac{2|z|}{|z-2|}$. c) Déterminer l'ensemble des points M' lorsque M décrit (Δ)

Exercice n°15 : dans $\mathbb{C}$ l équation : $Z^2 = -4$.

b- Soit Z un nombre complexe. Développer $\left(Z - 2\sqrt{3}\right)^2$.

c- En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $Z^2 - 4\sqrt{3}Z + 16 = 0$.

2) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{U}, \vec{V})$. On considère les points A et B d'affixes respectives : $Z_A = 2\sqrt{3} - 2i$ et $Z_B = 2\sqrt{3} + 2i$.

a- Donner la forme trigonométrique de chacun des nombres complexes Z_A et Z_B.

b- Construire les points A et B.

c Donner une mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right)$.

d- Montrer que le triangle OAB équilatéral.

3) Déterminer l'affixe du centre de gravité I du triangle OAB.

4) Déterminer l'affixe du point C tel que OABC soit un losange.

5) Déterminer l'ensemble des points M d'affixes Z tels que : $|Z| = |\overline{Z} + 4i|$.

Exercice n°16 : 1) Mettre chacun des nombres complexes suivants sous forme cartésienne :

$z_1 = \frac{2-i}{1+i} - (1-i)^2$ et $z_2 = (2-i)^4 - i^{2009}$.

2) Pour tout nombre complexe $z = x + iy \neq 1$ où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, on pose : $z' = \frac{iz}{z-1}$.

a) Donner la forme algébrique de z'.

b) Déterminer l'ensemble : $\zeta = \{M(z) / z' \text{ est un réel}\}$.

3) On considère l'équation : $(E) : z^2 - 2z + 5 = 0$.

a) Donner la forme canonique de $z^2 - 2z + 5$.

b)En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E).

Exercice N°17 : dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, soient A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = \sqrt{3} + i$; $z_B = -1 - i\sqrt{3}$; $z_C = -2$.

1) a) Mettre z_A, z_B et $\frac{z_A}{z_B}$ sous forme trigonométrique.

b) Placer le point C et construire A et B ; c) Déterminer la nature du triangle ABC.

2) Soit $I = A * B$, déterminer z_I.

3) Soit le nombre complexe $z_0 = 4\cos\frac{\pi}{12}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$.

a) Montrer que z_0 est l'affixe de $\overrightarrow{CA}$; b) En déduire la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{12}$

c) Déterminer un argument de $(z_A - z_B)$, en déduire un argument de $\frac{z_A - z_C}{z_A - z_B}$.

4) Déterminer les ensembles suivants : $E_1 = \{M(z) \in P / |iz - i\sqrt{3} + 1| = 2\}$ et

$E_2 = \{M(z) \in P / |\bar{z} + 2| = |z - \sqrt{3} - i|\}$

Exercice N°18: Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixe respectives : $a = i$, $b = \cos\theta + i(1 - \sin\theta)$ et $c = -\cos\theta - i(1 + \sin\theta)$. $\theta \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

a) Déterminer θ pour que A, B et C soient alignés.

b) Déterminer θ pour que B et C appartiennent à un cercle de centre O. quel est le rayon de ce cercle ?

Exercice N°19: $(O;\vec{u};\vec{v})$ un repère orthonormé direct du plan P.

1) a) Vérifier que $z^2 - 2z + 10 = (z-1)^2 + 9$; b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 10 = 0$

2) On désigne par A et B les points d'affixes respectives $z_A = 1-3i$ et $z_B = 1+3i$

a) Montrer que le triangle OAB est isocèle en O.

b) Déterminer l'affixe du point C tel que OACB est un losange.

c) Calculer l'aire du losange OACB

3) Déterminer et construire l'ensemble des points $M(z)$ dans chacun des cas suivants :

a) $C:\{M(z) \text{ tel que } |z-1+3i| = 2\}$ .b) $\Delta:\{M(z) \text{ tel que } |z| = |z-1-3i|\}$

Exercice N°20: Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$. On désigne par A et B les points d'affixes respectives $z_A = \sqrt{3}-i$ et $z_B = 1+i\sqrt{3}$

1) Montrer que le triangle OAB est isocèle

2) a) Déterminer les coordonnées polaires des points A et B puis construire ces points.

b) Déterminer une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$

3) Soit C le point d'affixe $z_C = z_A + z_B$. Montrer que le quadrilatère OACB est un carré.

4) Déterminer l'ensemble des points M d'affixes Z tels que $|Z-1-i\sqrt{3}| = |Z-\sqrt{3}+i|$

Exercice N°21: Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$. On désigne par A ; B ; C et D les points d'affixes respectives $z_A = 2$; $z_B = \frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$; $z_C = 1+i$ et $z_D = -2i$

1) a) Placer les points A ; b ; C et D dans le repère $(O;\vec{u};\vec{v})$.

b) Ecrire z_A ; z_B et z_D sous forme trigonométrique

2) Déterminer les ensembles $E = \{M(z) \in P / |z-2| = |z+2i|\}$ et $F = \{M(z) \in P / |iz+1-i| = 2\}$

3) a) Montrer que le triangle ABD est un triangle rectangle en A.

b) Déterminer l'affixe du point E tel que ABED est un rectangle.

c) Calculer l'aire du rectangle ABED.

Exercice N° 22: Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On désigne par A, B et C les points de P d'affixes respectives $z_A = 2i$; $z_B = 1-i$ et $z_C = -3+i$.

1) Placer les points A, B et C dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$.

2) Déterminer l'ensemble $E = \{M(z) \in P \setminus |z-1+i| = |z-2i|\}$

3) a) Calculer AB, AC et BC . b) En déduire la nature du triangle ABC.

4) a) Soit D le symétrique de C par rapport à l'axe des abscisses, déterminer l'affixe du point D.

b) Montrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

5) a) Déterminer l'affixe du point E telle que $\frac{z_A - z_E}{z_C - z_E} = -i+1$

b) Montrer que ABEC est un carré.

Exercice 23 :1) Soit le nombre complexe $Z=\dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}$

a) Ecrire sur le forme algébrique le nombre complexe Z .b) Calculer iZ et Z^2.

c) Soit le nombre complexe $U=\dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}+\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}$ Montre que U est un réel puis calculer U

2)a) Verifier $(z+1)^2+1=z^2+2z+2$. b)Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2+2z+2=0$.

3) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ On considère A,B et C d'affixes respectives $Z_A=1+i$; $Z_B=-1-i$; $Z_C=\sqrt{3}-i\sqrt{3}$

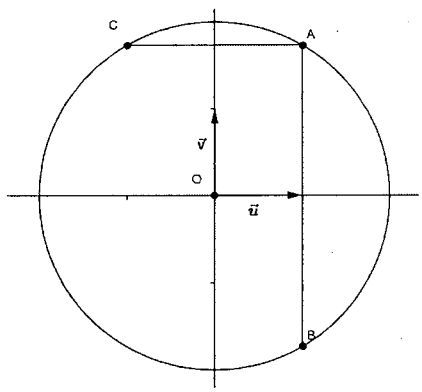
a)Montrer que ABC est un triangle équilatéral. b) Placer les points A,B et C.

c) Ecrire Z_A et Z_C sus forme trigonométrique.

d) Donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA})$.En déduire la nature du triangle OAC.

e) Déterminer l'affixe du point D pour que le quadrilatère $OADC$ soit un rectangle .

Exercice n°24: **A)** Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère le cercle ζ de centre O et de rayon 2. A le point de ζ tel que : $(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OA}})\equiv\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$.



1) Déterminer l'écriture algébrique de z_A.

2) Soient B et C les symétriques respectifs de A par rapport à $(O,\vec{u})$ et $(O,\vec{v})$. Déterminer l'écriture trigonométrique de z_B et z_C.

3) Soit D le point trigonométrique de $z_D=\dfrac{z_A.z_B}{z_C}$. Déterminer l'écriture trigonométrique de z_D et prouver que ABCD est un rectangle.

B) Soit $\alpha\in\left]-\dfrac{\pi}{4};0\right[$. On pose : $z=1-\tan^2(\alpha)+2i\tan(\alpha)$. Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse :

1) La partie réelle de z est strictement positive.

2) $|z|=1+\tan^2(\alpha)$

3) $\arg(z)\equiv\alpha[2\pi]$

RESUME DU COURS

Définition : Lorsque deux bipoints $(A;B)$ et $(C;D)$ sont tels que $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu. Alors ces bipoints représentent un même vecteur de l'espace, noté $\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{DC}$

Les bipoints $(M;M)$ où M est un point quelconque de l'espace représentent le vecteur nul, noté $\vec{0}$.

L'ensemble des vecteurs de l'espace est noté $\mathcal{W}$.

Conséquence : Soit A, B, C et D quatre points de l'espace tel que A, B et C ne soient pas alignés. Alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, si et seulement si, ABCD est un parallélogramme.

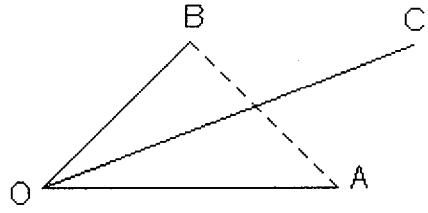
Définition : On appelle norme d'un vecteur $\vec{u}$ et on note $\|\vec{u}\|$, le réel positif défini par $\|\vec{u}\| = AB$ où A et B sont deux points quelconques tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

Théorème : Soit O un point de l'espace. Pour tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathcal{W}$ il existe un unique point M de ξ tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.

Définition : Soient O un point de ξ, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{W}$.

Soit A, B et C les points de ξ tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$;

$\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ et $[OC]$ et $[AB]$ ont le même milieu. On appelle vecteur somme de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le vecteur $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$. On note $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$



Conséquence : Pour tous points A, B et C de ξ,

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (Relation de Chasles).

Soit A, B, C et D quatre points de ξ tels que A, B et C ne sont pas alignés. Alors ABCD est un parallélogramme, si et seulement si, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

Propriétés : Pour tous vecteurs $\vec{u}$; $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de $\mathcal{W}$: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$; $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$; $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, il existe un unique vecteur $\vec{v}$ de l'espace tel que : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$, le vecteur $\vec{v}$ tel que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$ s'appelle vecteur opposé de $\vec{u}$ et se note $-\vec{u}$

Définition : Soient $\vec{u}, \vec{v}$ *et* $\vec{w}$ trois vecteurs de **W**.

On dit que $\vec{w}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, s'il existe deux réels α et β tels que : $\vec{w} = \alpha.\vec{u} + \alpha.\vec{v}$.

Lorsque l'un des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ *et* $\vec{w}$ est une combinaison linéaire des deux autres.

On dit que les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ *et* $\vec{w}$ sont linéairement dépendants ou encore que la famille $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$.

Théorème : Soit A un point de l'espace et $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ deus vecteurs non colinéaires.

L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ soit combinaison linéaires de $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ est un plan, appelé plan passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$. Un point M appartenant au plan $\mathbf{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$, si et seulement si, il existe un unique couple de réels(x ; y) tel que : $\overrightarrow{AM} = x.\vec{u} + y.\vec{v}$.

Conséquence : Soient O, A, B et C quatre points de ξ. O, A, B et D sont coplanaires, si et seulement si, la famille $\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\}$ est liée.

Propriété: Soient A et B deux points distincts de ξ et $\vec{u}, \vec{v}$ *et* $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls tels que : $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ soient colinéaires. Alors la droite $\mathbf{D}(A, \vec{u})$ est parallèle au plan $\mathbf{P}(B, \vec{v}, \vec{w})$, si et seulement si, la famille $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est liée.

Propriété : Soient A et B deux points distincts de ξ et $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}'$ *et* $\vec{v}'$ deux vecteurs non colinéaires. Alors :$\mathbf{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$ et $\mathbf{P}'(B, \vec{u}', \vec{v}')$ sont parallèles, si et seulement si, $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}'\}$ et $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}'\}$ sont liées.

Définition : Soient $\vec{i}, \vec{j}$ *et* $\vec{k}$ trois vecteurs de **W.** Le triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base de **W**, si et seulement si, la famille $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ n'est pas liée. Soit O un point de **W.** On dit que $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère cartésien de ξ si $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base de **W.**

Conséquence : Soient A, B, C et D quatre points de ξ.Le triplet $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ est une base de **W,** si et seulement si, les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

Théorème : Soit O un point de ξ et $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de **W.**

Pour tout vecteur $\vec{u}$ de **W** il existe un unique triplet (x, y, z) de réels tel que : $\vec{u} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$.

Le triplet (x, y, z) de réels s'appelle le triplet de composantes du vecteurs $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et on note $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Pour tout M de l'espace ξ il existe un unique triplet (x, y, z) de réels tel que : $\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$. Le triplet (x, y, z) de réels s'appelle le triplet de cordonnées du point M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Théorème : Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de **W**. soit $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ deux vecteurs de **W**, α et β deux réels.

Les composantes de $\alpha.\vec{u} + \beta.\vec{v}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont $\begin{pmatrix} \alpha a + \beta a' \\ \alpha b + \beta b' \\ \alpha c + \beta c' \end{pmatrix}$.

Définition : Soit $\mathbf{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de **W** et $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ un triplet de vecteurs de **W** tels que : $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ *et* $\vec{w}\begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix}$.

On appelle déterminant de $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ dans la base B, et noté $\text{dét}_B(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$ le réel $a(b'c''-c'b'')-b(a'c''-c'a'')+c(a'b''-b'a'')$.

Théorème : Un triplet de vecteurs de **W** forme une base, si et seulement si, son déterminant relativement à une base quelconque de **W** est différent de 0.

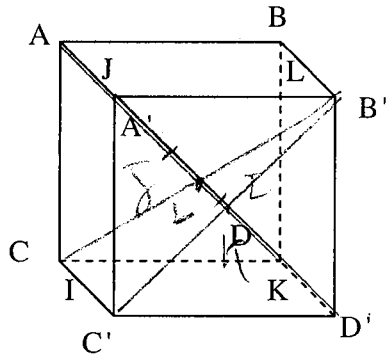
LES EXERCICES

Exercice N°1 : ABCD un tétraèdre ; I, J, K et L sont les points définis par : $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CK}=\frac{3}{8}\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{6}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$.

1) Calculer les coordonnées des points I, J, K et L dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}\right)$.

2) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IL}$ et $\overrightarrow{JK}$ et déterminer le réel m tel que : $\overrightarrow{IL}=m.\overrightarrow{JK}$

Exercice N°2 : ABCDA'B'C'D' un cube. On note I le milieu de $[A'D']$, J celui de $[AD]$, K celui de $[B'C']$ et L celui de $[BC]$.



1) a) Démontrer que les points I, J, K et L sont coplanaires.

b) Démontrer que $\overrightarrow{D'K};\overrightarrow{D'C'}$ et $\overrightarrow{B'C'}$ sont coplanaires.

c) Comparer $\overrightarrow{IB'}$ et $\overrightarrow{D'K}$.

2) Démontrer que les plans (IJB') et $(D'KL)$ sont parallèles.

Exercice N°3 : Dans l'espace ξ, rapporté à un repère cartésien $R=\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$. On considère les points : $A(1;1;-2)$; $B(0;2;1)$; $C(-1;2;3)$ et $D(0;3;2)$.

1)Vérifier que les points A, B et C ne sont pas alignés. On désigne par P le plan (ABC).

2) Montrer que le point D appartient au plan P.

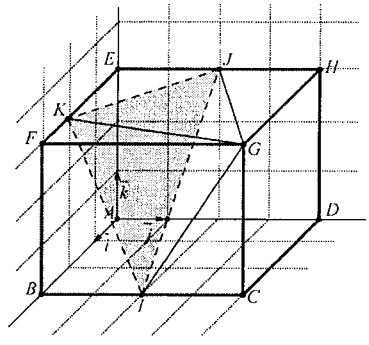
3) Soit $F(1-m;m;m+1)$, où m est un paramètre réel. Déterminer m pour que la droite (AF) soit contenue dans le plan P

4) On considère les vecteurs : $\overrightarrow{e_1}=3\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k};\overrightarrow{e_2}=\vec{j}+2\vec{k}$ et $\overrightarrow{e_3}=\vec{i}+2\vec{j}$.

a) Montrer que $R'=\left(A;\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2};\overrightarrow{e_3}\right)$ est un repère de ξ.

b) Déterminer les coordonnées du point B dans le repère R'.

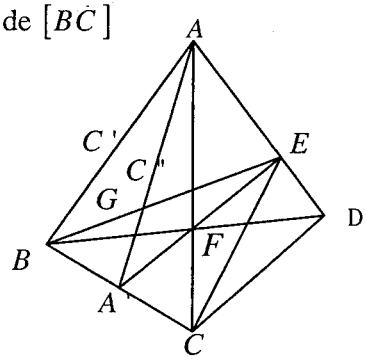
Exercice n°4 : L'espace est muni d'un repère orthonormé de sens direct $\left(A,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. On considère le parallélépipède ABCDEFGH tel que : $\overrightarrow{AB}=3\vec{i}$, $\overrightarrow{AD}=4\vec{j}$ et $\overrightarrow{AE}=3\vec{k}$.



1) Vérifie que : $\overrightarrow{AG}=3\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}$.

2) Soient les points I et J les milieux respectives des arrêtes [BC] et [EH]. Soit K le point défini par : $\overrightarrow{EK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ .Déterminer les coordonnées de I et J et K

Exercice5 : On considère un tétraèdre ABCD et les points : A' le milieu de $[BC]$ et G le centre de gravité du triangle ABC.



1) Soit le point E défini par $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

a) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{EG}$ *et* $\overrightarrow{DA'}$ sont colinéaires.

b) Que peut-on en déduire pour les vecteurs $\overrightarrow{EG}$; $\overrightarrow{DB}$ *et* $\overrightarrow{DC}$?

2) Soit le point F défini par : $\overrightarrow{GF} = \frac{2}{9}\overrightarrow{AD}$.

Montrer que les points A' ; F et E sont alignés et que F est le centre de gravité du triangle BCE.

3) Soient les points C' *et* C'' milieux respectifs des segments $[AB]$ *et* $[EB]$ Montrer que $\overrightarrow{C'C''} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

4) Soit le point M défini par $\overrightarrow{CM} = 3\overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{CB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AD}$. a) Montrer que $\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{CC'} + 4\overrightarrow{CC''}$

b) Que peut-on en déduire pour les points C , C' , C'' et M ?

Exercice N°6 : On muni le plan l'espace d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$; On donne les points $A(-1;1;0)$; $B(1;-2;1)$; $C(0;-1;0)$ et $D(-1;-2;2)$.

1) Placer les points A ; B ; C et D. 2) Soient $\vec{v}\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $\Delta(C;\vec{v})$. Montrer que (AB) et Δ sont parallèles.

3) On considère $\vec{w}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et le plan $Q(A;\overrightarrow{AB};\vec{w})$.a) Montrer que la droite (AB) est incluse dans le plan Q ;

b) En déduire la position relative de Δ et Q

4) a) Montrer que la droite (CD) est parallèle au plan Q

b) Les droites (CD) et Δ sont-elles coplanaires ? Justifier

RESUME DU COURS

Définition : Soient $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ deux vecteurs et soit α la mesure en radians de l'angle géométrique déterminé par deux représentants de même origine des vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ .On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ *par* $\vec{v}$, le réel défini par : a) $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\alpha$ si $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont non nuls.

b) $\vec{u}.\vec{v} = 0$ si l'un des vecteurs $\vec{u}$ *ou* $\vec{v}$ est nul.

Conséquences : Pour tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathcal{W}$. on a

a) $\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ (lorsque $\|\vec{u}\| = 1$, on dit que le vecteur $\vec{u}$ est unitaire).b) $\|\vec{u}\| = 0$ si et seulement si $\vec{u} = \vec{0}$.

a)Pour tout vecteur non nul de $\mathcal{W}$, le vecteur $\frac{1}{\|\vec{u}\|}.\vec{u}$ est unitaire.

b)Pour trois O, A et B de ξ : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = OA.OB\cos A\hat{O}B$

Définition: Deux vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ de W sont dits orthogonaux $\vec{u}.\vec{v} = 0$ et on note $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Propriété: Soit O, A et B trois points du l'espace et H le projeté orthogonal de B sur (OA), alors $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}$

Théorème : Soit A et B deux points de l'espace et $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs non nuls de W. Alors les droites $\mathcal{D}$ (A, $\vec{u}$) et $\mathcal{D}$ (B, $\vec{v}$) sont orthogonaux, si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Définition: Soit A un point de l'espace, $\vec{n}$ un vecteur non nul et $\mathcal{P}$ un plan. On dit que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan $\mathcal{P}$ si la droite $\mathcal{D}$ (A, $\vec{n}$) est orthogonal à $\mathcal{P}$.

Conséquence: Soit A un point et $\vec{n}$ un vecteur non nul. Il existe un unique plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Propriétés: Un vecteur non nul $\vec{n}$ est normal à $\mathcal{P}$ (O, $\vec{u}, \vec{v}$), si et seulement si, $\vec{n}.\vec{u} = 0$ *et* $\vec{n}.\vec{v} = 0$

Deux vecteurs non nuls $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont normaux à un même plan, si et seulement si, ils sont colinéaires

Propriété: Deux droites son t orthogonales si et seulement si leurs vecteurs directeurs respectifs sont orthogonaux.

Deux plans sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs normaux respectifs sont orthogonaux.

Définition : Une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de W est dite orthogonale si les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}$ *et* $\vec{k}$ sont orthogonaux deux à deux.

Un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de ξ est dit orthogonal si la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthogonale. Une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de W est dite orthonormé si les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}$ *et* $\vec{k}$ sont unitaires et orthogonaux deux à deux. Un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de ξ est dit orthonormé si la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormée.

Propriétés: Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace.

Pour tous vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$ *et* $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Pour tous points M(x, y, z) et M' (x', y', z') on a $MM' = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$

LES EXERCICES

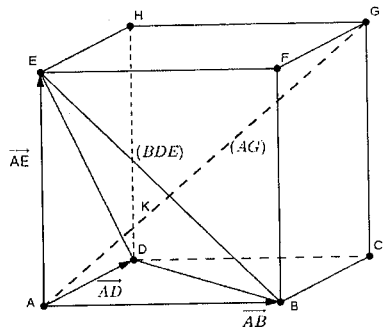
Exercice 1 : Soit ABCDEFGH un cube de côté 1 ; on définit le repère orthonormal $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1) Déterminer les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G et H.

2) Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{AG}$; en déduire que la droite (AG) et le plan (BDE) sont orthogonaux.

3) Montrer que le centre de gravité K du triangle BDE et le point d'intersection de la droite (AG) et du plan (BDE).

4) Déterminer une mesure à 0,1° près de l'angle $E\hat{K}C$.



Exercice2 : Soit ABCDEFGH un parallélépipède rectangle tel que : $AB = 3$; $AD = 4$ *et* $AE = 5$. On pose $\vec{i} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$; $\vec{j} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ et $k = \frac{1}{5}\overrightarrow{AE}$.

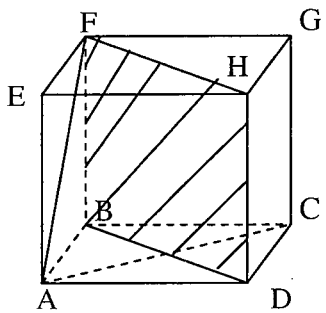
1)Montrer que $\mathcal{B} = \left(\mathcal{A}; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\right)$ est un repère orthonormé de l'espace.

2) Déterminer les coordonnées des points C, E et G dans le repère $\mathcal{B}$.

3) Montrer que les droites (AG) *et* (CE) sont orthogonales.

Exercice3 : On considère un cube ABCDEFGH.

L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE}\right)$.



1) a) En utilisant le produit scalaire, montrer que les droites (AF) et (CH) sont orthogonales.

b) Vérifier que $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{BE}$ et en employant une autre méthode retrouver le résultat du 1) a).

2) a) Montrer que la droite (AE) est perpendiculaire au plan (ABCD)

b) En déduire la valeur de $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AC}$.

3) Montrer que la droite (AC) est perpendiculaire au plan (HDBF)

Exercice 4 : Dans un repère orthonormal de l'espace, soient les points A(1 ;2 ;-1), B(3 ;2 ;-1) , C(1 ;4 ;-1) et D(1 ;2 ;1).

1) Montrer que le tétraèdre ABCD est trirectangle (les triangle ABC, ACD et ADB sont des triangle rectangles) 2) Montrer que le triangle BCD est équilatéral.

3) Soit G le centre de gravité du triangle BCD ; montrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BCD).

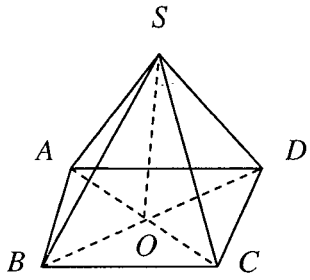
Exercice5 :ABCDS est une pyramide dont la base ABCD est un carré de centre O. On suppose que O est le projeté orthogonal de S sur le plan (ABCD) et que $AB = SO = a$; $(a > 0)$

1) a) Montrer que $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC} = SO^2 + \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}$

b) Exprimer en fonction de a le produit scalaire $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC}$

2) a) Déterminer la valeur de $\cos\widehat{ASC}$.

b) Déterminer une valeur approchée au degré prés de l'angle $\widehat{ASC}$.



Exercice N° 6: $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ est une base orthonormée ; θ est un réel. On considère les vecteurs $\vec{U}=\cos\theta\vec{i}+\sin\theta\vec{j}$, $\vec{V}=-\sin\theta\vec{i}+\cos\theta\vec{j}$ et $\vec{W}=\vec{K}$.

1) Montrer que $(\vec{U};\vec{V};\vec{W})$ est une base orthonormée.

2) Déterminer θ pour que $\vec{U}$ soit orthogonal au vecteur $\vec{t}=2\vec{i}+\vec{k}$

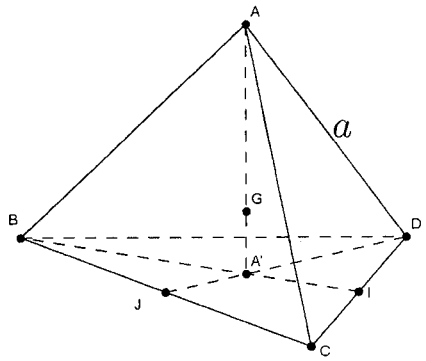
Exercice7: ABCD est un tétraèdre régulier de l'espace, d'arête a.

1) Montrer que les arêtes opposées, par exemple [AB] et [CD], ont pour supports des droites orthogonales.

2) Soit A' le centre de gravité du triangle BCD. Montrer que la droite (AA') est orthogonale au plan (BCD).

3) Soit G l'isobarycentre des points A, B, C et D. Calculer $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}$.

En déduire une valeur approchée à 0,1° près de l'angle $A\hat{G}B$.

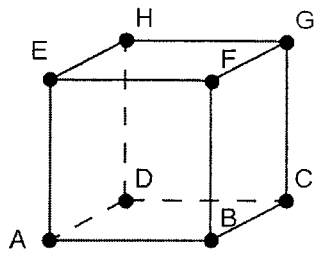


Exercice 8 : Soit un cube ABCDEFGH d'arête a.

1) Calculer $\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{BG}$. Que peut-on en déduire pour la droite (DF) et le plan (BEG).

2) I est le milieu de [BF]. En quels points R et S, le plan P, contenant B et orthogonal à (DI), coupe-t-il respectivement (DI) et (FH) ? (On caractérisera R et S par une relation vectorielle $\overrightarrow{DR}=k\overrightarrow{DI}$ et $\overrightarrow{FS}=m\overrightarrow{FH}$)

3) Sous quel angle est vue une arrête depuis le centre O du cube ?



Exercice 9 : ABCDEFGH est un cube d'arrête 1. Soit I ; J ; K et L les milieux respectifs des arêtes $[EH]$; $[BF]$; $[BC]$ et $[DH]$. On munit l'espace du repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$.

1) a) Déterminer les coordonnées des sommets du cube.

b) En déduire les coordonnées des points I ; J ; K et L.

c) Prouver que UKL est un rectangle dont les diagonales se coupent en O, centre du cube.

2) a) Calculer IJ, JK et IK ; b) Déterminer $\cos\widehat{IOL}$. En déduire la valeur de l'angle $\widehat{IOL}$.

Exercice n°10 :Soient x,y,z ,a,b et c six réels quelconques .

Montrer que $(xa+yb+zc)^2 \leq (x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)$.

Exercice 11 : $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ est un repère orthonormé de l'espace. Soit a un réel strictement positif.

On donne $A(a;0;0)$; $B(0;a;0)$; $C(-a;a;a)$ et $D(0;0;a)$.

1) a) Montrer que ABCD est un losange ; b) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.c) En déduire que la valeur de l'angle $\widehat{BAD}$

2) Soit H le point de coordonnées $\left(\frac{a}{3};\frac{a}{3};\frac{a}{3}\right)$.Montrer que H est le projeté orthogonal du point O sur le plan $(ABCD)$.

3) Vérifier que H est le centre de gravité du triangle ABD.

Résumé du cours

A retenir : Soit B $=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une base de W. On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$ deux vecteurs de W.

($\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont colinéaires) si et seulement si ($\begin{vmatrix}a & a'\\b & b'\end{vmatrix}=0$; $\begin{vmatrix}a & a'\\c & c'\end{vmatrix}=0$ *et* $\begin{vmatrix}b & b'\\c & c'\end{vmatrix}=0$)

Conséquence : Si $a.b.c\neq 0$. Alors :($\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont colinéaires) si et seulement si ($\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}$)

Théorème: L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soit A ($x_0$, y_0, z_0) et le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ tel que $(a,b,c)\neq(0,0,0)$. L'ensemble des points M(x, y, z) vérifiant $\begin{cases}x=x_0+\alpha a\\y=y_0+\alpha b;\alpha\in\mathbb{R}\\z=z_0+\alpha c\end{cases}$ est la droite $\boldsymbol{D}$ (A, $\vec{u}$).

Le système précédent s'appelle représentation paramétrique de la droite $\boldsymbol{D}$ (A, $\vec{u}$).

Théorème: L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soit A ($x_0$, y_0, z_0) et $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$ deux vecteurs non colinéaires. L'ensemble des points M(x, y, z) vérifiant le système $\begin{cases}x=x_0+\alpha a+\beta a'\\y=y_0+\alpha b+\beta b'\alpha \text{ et } \beta\in\mathbb{R}\\z=z_0+\alpha c+\beta c'\end{cases}$ est le système précédent s'appelle représentation paramétrique du plan $\boldsymbol{P}$ (O, $\vec{u},\vec{v}$).

Théorème : L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Pour tout plan P, il existe quatre réels a, b, c et d vérifiant $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ tels que : M(x, y, z) appartient à P si et seulement si ax + by + cz + d = 0.

L'équation ax + by +cz + d = 0 est appelée équation cartésienne de P.

Théorème: L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et a, b, c et d quatre réel tels que : $(a,b,c)\neq(0,0,0)$.

L'ensemble des points M(x, y, z) vérifiant l'équation ax + by + cz + d = 0 est un plan.

Théorème: L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

L'ensemble des ponts M(x, y, z) tels que $\begin{cases}ax+by+cz+d=0\\a'x+b'y+c'z+d'=0\end{cases}$ est une droite, si et seulement si, les triplets (a, b, c) et (a', b', c') ne sont pas proportionnels.

Théorème: Soit A un point de l'espace et $\vec{n}$ un vecteur non nul.
L'ensemble des points M de l'espace tel que $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ est le plan passant par A et de vecteur normal à $\vec{n}$

Propriété: L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Si $\mathcal{P}$ est un plan a pour équation ax + by + cz + d =0, alors le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est normal à $\mathcal{P}$.

LES EXERCICES

Exercice 1 L'espace ζ est rapporté à un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1) Dans l'espace muni d'un repère cartésien $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ on considère les droites

$$D:\begin{cases}x=\alpha-1\\ y=-2\alpha+2 \quad ,\alpha\in\mathbb{R}\\ z=\alpha-3\end{cases} \quad \text{et} \quad D':\begin{cases}x=-\beta+1\\ y=2\beta+5 \quad ,\beta\in\mathbb{R}\\ z=-\beta\end{cases}$$

a) D et D' sont sécantes
b) D et D' sont strictement parallèles
c) D et D' sont confondues
d) D et D' sont coplanaires

2) L'ensemble des points M (x, y, z) de l'espace tels que $\begin{cases}x=\beta\\ y=\alpha+\beta \ ;(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\\ z=-\beta\end{cases}$, est :

a)le plan d'équation cartésienne y=1 b)le plan d'équation cartésienne x+z=0
c) La droite passant par le point A(0, 1, 0) et vecteur $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$

3) L'ensemble des points M (x, y, z) de l'espace tels que $\begin{cases}x=1+\alpha+\beta\\ y=2-\alpha-\beta \ ;(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\\ z=3\end{cases}$, est :

a)le plan d'équation cartésienne z=3 b)le plan d'équation cartésienne x+y=3
c) La droite passant par le point A(1, 2, 3) et vecteur $\vec{i}-\vec{j}$

4) Dans l'espace ζ, on considère un triangle ABC. L'ensemble des points M de l'espace tel que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ est : a) {c} b) le plan passant par C et perpendiculaire à (AB)
c) La droite passant par le point C orthogonale à (AB)

Exercice 2: On considère les points A(2 ;-3 ;1), B(0 ;1 ;5) et C(-4 ;5 ;7). Donner une représentation paramétrique de la droite (D) passant par C et parallèle à la droite (AB).

Exercice 3 : Les droites D et D' sont données par les représentations paramétriques suivantes :

$$D:\begin{cases}x=1+k\\ y=3-k \quad ,k\in\mathbb{R}\\ z=-1+k\end{cases} \text{ et } D'\begin{cases}x=3+k'\\ y=2-2k' \ ,k'\in\mathbb{R}\\ z=m+2k'\end{cases}$$

. Etudier, suivant les valeurs du réel m, l'intersection des droites D et D'.

Exercice 4: L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.

1) Donner un système d'équations paramétriques de la droite passant par $A(2;3;-1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

2) On considère les points $C(2;3;0)$ et $D(-1;1;5)$. Donner un système d'équations paramétriques de la droite (CD).

3) Etudier la position relative des droites $D\left(A;\vec{u}\right)$ et (CD).

Exercice 5: Déterminer l'intersection du plan P d'équation : $4x-y+2z-4=0$ et de la droite D de représentation paramétrique : $\begin{cases}x=k\\y=1-3k\\z=-2+k\end{cases}, k\in\mathbb{R}$.

Exercice 6: Dans l'espace ξ, rapporté à un repère cartésien $R=\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$. On considère la droite D passant par le point $A(1;-1;2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$.

1) a) Donner une représentation paramétrique de la droite D. b) Le point $B(3;2;-1)$ appartient-il à D ?

2) Soit Δ la droite définie par : $\begin{cases}x=2-\alpha\\y=3+2\alpha\\z=1+3\alpha\end{cases}$; $(\alpha\in IR)$ Donner un système d'équations cartésiennes de la droite Δ.

3) Déterminer $D\cap\Delta$

Exercice 7 : On considère les plans P et P' d'équations respectives : $2x+y-2z-3=0$ et $x+y+3z-2=0$.

1) Montrer que P et P' sont sécants et déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection (D).

2) Etudier d'intersection de (D) avec le plan P'' d'équation : $x+y-z-6=0$.

3) Retrouver, par le calcul direct, l'intersection des trois plans P, P et P''.

Exercice 8 : Dans l'espace ζ rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$. On considère les droites D et D' définies par : $D\begin{cases}x=2+\alpha\\y=3+2\alpha\\z=1+\alpha\end{cases}$; $(\alpha\in IR)$ *et* $D'\begin{cases}x-3z-1=0\\y+2z-1=0\end{cases}$

1)Montrer que les droites D et D' sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection A.

2) Donner une équation cartésienne du plan P contenant D et D'.

3) Soit Q le plan d'équation cartésienne : $2x-y-5=0$.

a)Montrer que les plans P et Q sont sécantes suivant une droite Δ dont on donnera un point et un vecteur

b) Montrer que les droites D et Δ sont strictement parallèles.

Exercice 9: L'espace ξ est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$. On donne les points $A\left(-1;1;-1\right)$; $B\left(0;2;2\right)$; $C\left(1;1;1\right)$ et. $D\left(2;4;-4\right)$

1) Déterminer une équation cartésienne du plan P passant par le point $H\left(1;2;0\right)$ et orthogonal à (AH)

2) Vérifier que les points B, C et D appartiennent à P.

Exercice 10 : L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$. Soit P le plan d'équation :

$2x-2y+x-3=0$ et A le point de coordonnées $\left(1;1;2\right)$.

1) Déterminer la distance d du point A au plan P.

2) Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de A sur P. Vérifier que $AH=d$.

Exercice 11 Dans l'espace ξ, rapporté à un repère cartésien $R=\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$. On considère les points :

$A\left(1;1;1\right)$; $B\left(2;0;-1\right)$; $C\left(-1;2;-1\right)$ et $E\left(2;-1;3\right)$.

1) a) Vérifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) Déterminer une équation cartésienne du Plan P contenant A, B et C.

c) Les vecteurs $\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont-ils coplanaires ?

2) Soit Δ l'ensemble des points $M\left(x;y;z\right)$ de ξ tels que : $\begin{cases} x+y-1=0 \\ z-2y-5=0 \end{cases}$.

a) Vérifier que l'ensemble Δ est une droite de ξ dont on précisera un point et un vecteur directeur.

b) Vérifier que E appartient à la droite Δ.

c) Etudier la position relative de Δ et $\left(AB\right)$ d) En déduire l'intersection de Δ et P.

Exercice 12: L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. On considère les points A(6,0,0) ; B(0,6,0) ; C(0,0,6) et D(-2,-2,-2).

1) a) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) On note P le plan (ABC). Déterminer une équation cartésienne du plan P.

c) Montrer que les points A, B, C et D sont coplanaires.

2) a) Vérifier que la droite (OD) est perpendiculaire au plan P.

b) Donner une représentation paramétrique de la droite (OD).

c) Soit H le projeté orthogonal de O sur P. Déterminer les coordonnées de H et montrer que H est équidistant des points A, B et C.

d) En déduire que (OD) est l'axe du cercle circonscrit au triangle ABC.

3) Soit Q le plan médiateur du segment [CD]. a) Donner une équation cartésienne de Q.

b) Montrer que P et Q sont sécants et déterminer leur intersection.

Exercice 13: Soit $\left(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right)$ un repère orthonorml de l'espace.

1) Soit G l'isobarycentre des points A, B et C.

a) Donner les coordonnées du point G.b) Montrer que la droite (OG) est perpendiculaire au plan (ABC). c) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

2) On considère les points A'(2 ;0 ;0), B'(0 ;2 ;0) et C'(0 ;0 ;3).

a) Donner une représentation paramétrique de la droite (A'C').

b) Calculer les coordonnées du point K commun de la droite (A'C') et du plan (ABC).

c) Donner une représentation paramétrique de la droite (B'C').

d) Calculer les coordonnées du point L commun à la droite (B'C') et au plan (ABC).
e) Caractériser alors l'intersection des plans (ABC) et (A'B'C').

Exercice 14 : Dans l'espace ζ rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$. On considère les points $A\left(-1;2;1\right)$; $B\left(1;-6;-1\right)$ et $C\left(2;2;2\right)$.

1) Déterminer une équation cartésienne du plan P contenant les points A ; B et C.
2) Soit Q le plan d'équation : $x+y-3z+2=0$ *et* Q' le plan de repère $\left(O;\vec{i};\vec{k}\right)$.
a) Montrer que les plans Q et Q' sont sécantes.
b) Donner un point E et un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite d'intersection Δ des plans Q et Q'.

Exercice 15 : L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. On donne les points $A\left(2,1,-1\right);B\left(0,2,1\right)$ et $C\left(1,2,-1\right)$.

1) a) Montrer que A, B et C déterminent un plan.
b) Montrer qu'une équation cartésienne de $\left(ABC\right)$ est : $2x+2y+z-5=0$

2) Soit la droite $\Delta:\begin{cases} x=1-t \\ y=-1-t \\ z=-4-\frac{1}{2}t \end{cases}$;$\left(t\in IR\right)$

a) Montrer que Δ est perpendiculaire au plan $\left(ABC\right)$ puis calculer les coordonnées de leur point d'intersection E.
b) Vérifier que ABCE est un parallélogramme
3) a) Vérifier que le point $K\left(-1;-3;-5\right)$ est un point de Δ. b) Calculer $d\left(B;\Delta\right)$

Exercice 16 :Soit ABCDEFGH un cube de l'espace tel que $AB=1$
On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$

1) Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\left(AG\right)$
2)a) Montrer que la droite (AG) est perpendiculaire au plan (EBD)
b) En déduire une équation cartésienne du plan (EBD)
c) Déterminer les coordonnées du point L intersection du plan (EBD) et la droite (AG)

Exercice 17 L'espace est rapporté à un repère orthogonal $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. On donne $A\left(1,0,1\right)$, $B\left(1,3,-2\right)$, $C\left(3,1,0\right)$ et $D\left(2,2,0\right)$.

1) a) Montrer que A , B et C ne sont pas alignés.
b) Montrer qu'une équation cartésienne du plan $\left(ABC\right)$ est $y+z-1=0$.
c) En déduire que A, B, C et D ne sont pas colinéaires.
d) Ecrire une équation du plan P qui passe par le point D et parallèle au plan $\left(ABC\right)$.

2) Soit les plans P_1 et P_2 tels que : $P_1 : 2y - 2z + 1 = 0$ et $P_2 : \begin{cases} x = 2 + \alpha + 2\beta \\ y = 1 - \alpha - \beta \\ z = 1 - \alpha \end{cases}$ $\alpha \in IR ; \beta \in IR$

a) Montrer qu'une équation cartésienne du plan P_2 est $x + 2y - z - 3 = 0$.

b) Montrer que P_1 et P_2 se coupent suivant une droite Δ.

c) Donner une représentation paramétrique de la droite Δ.

d) Montrer que la droite Δ coupe le plan (ABC) en un point I dont on précisera les coordonnées.

Exercice 18 : Dans un repère orthonormal, soient A (-1 ;-1 ;0), B (2 ;0 ;4) et C (0 ;3 ;5).

1) Déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ différent du vecteur nul, à la fois orthogonal au vecteur $\overrightarrow{AB}$ et au vecteur $\overrightarrow{AC}$.

2) Etablir une équation du plan P = (ABC).

3) Parmi les points suivants, indiquer ceux qui appartiennent au même demi-espace ouvert de frontière P que l'origine : K(3 ;2 ;4), N (-5 ;-1 ;0) et Q (2 ;5 ;9).

4) Calculer la distance de l'origine au plan P.

Exercice 19 : L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. On considère les plans (P) et (P') d'équations $(P) : 2x - y + 2z - 5 = 0$; $(P') : 2x + 2y - z - 4 = 0$

1) Montrer que $(P) \perp (P')$

2) Calculer la distance du point $A(1;2;-1)$ à chacun des plans (P) et (P'). En déduire la distance du point A à la droite (D) d'intersection de (P) et (P')

3) a) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (D).

b) Déterminer par ses coordonnées, le point M de la droite (D) pour lequel la distance AM est minimale.

Exercice 20 : L'espace ζ est rapporté à un repère cartésien $R = (O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. A tout réel m ; on associe l'ensemble P_m des points $M(x;y;z)$ de ξ tels que : $(m-1)x + my + (2-m)z + 3m - 1 = 0$.

1) Vérifier que, pour tout réel m, P_m est un plan.

2) Soit D la droite définie par : $\begin{cases} x = -3 + 2\alpha \\ y = 1 + 3\alpha \\ z = -1 + \alpha \end{cases}$;$(\alpha \in IR)$

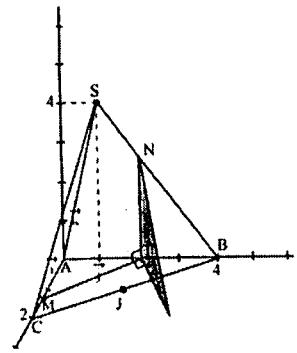
a) Déterminer m pour que D et parallèle à P_m ; b) D est-elle contenue dans un plan P_m ?

3) montrer que tous les plans P_m contiennent une droite fixe Δ dont on donnera une représentation paramétrique.

4) Soit $\mathcal{D}'$ la droite passant par $A(0;-2;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$

a) Déterminer $\mathcal{D}' \cap P_m$; b) Montrer que, pour tout réel m, $\mathcal{D}'$ et P_m sont sécants et préciser $\mathcal{D}' \cap P_m$

Exercice 21 : Dans la figure ci-contre $(A,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère orthonormé, ABCS est un tétraèdre tel que : $B(0;4;0)$; $C(2;0;0)$ et $S(0;1;4)$



1) Le point I est le milieu du segment $[AB]$. Déterminer les coordonnées du point I.

2) M est le point de coordonnées $(a;0;0)$ avec $a \in]0;2[$.
Déterminer l'ensemble des points M lorsque le réel a varie.

3) Le plan P passant par I et perpendiculaire à la droite (IM) coupe la droite (BS) au point N.

a) Montrer qu'une équation cartésienne du plan P est $ax-2y+4=0$

b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (BS)

c) En déduire que le point N reste fixe lorsque le point M varie.

Exercice 22: L'espace ζ est rapporté à un repère cartésien $R=(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. A tout réel m ; on associe le plan P_m dont une équation cartésienne est : $mx+2y-m^2z+3=0$.

1) a Déterminer les plans P_m passant par le point $A(2;0;1)$

b) Déterminer l'intersection des plans P_{-1} et P_1

c) Montrer que tous les plans P_m passent par un point fixe B dont on précisera les coordonnées.

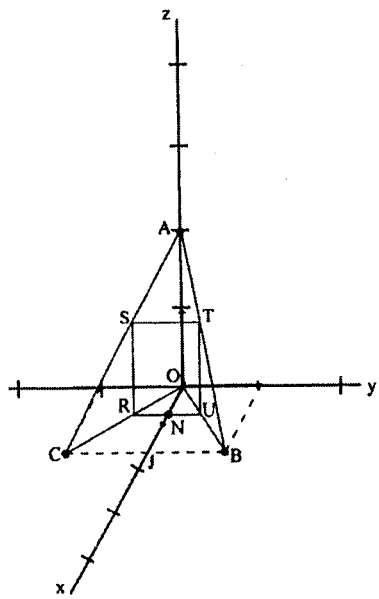
d) Déduire, suivant les valeurs de m, la position relative de (AB) et P_m.

2) Soit Δ la droite passant per B et de vecteur directeur $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$.

a) Montrer que les droites (OA) et Δ ne sont pas coplanaires.

b) Soit Q le plan contenant la droite (OA) et parallèle à Δ. Déterminer une équation cartésienne du plan Q

c) Déterminer m pour que les plan Q et P_m soient parallèles.



Exercice 23: L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On donne $A(0,0,2)$; $B(\sqrt{3};1;0)$ et $C(\sqrt{3};-1;0)$

1) Déterminer les coordonnées du point J le milieu du segment $[BC]$.

2) Soit N un point du segment $[OJ]$. On pose $ON=t$. A quel intervalle appartient t ?

3) Soit P le plan passant par le point N et orthogonal à la droite (OJ). Le plan P coupe les arêtes $[OC]$; $[AC]$; $[AB]$ et $[OB]$ respectivement aux points R, S, T et U.

a) Montrer que RSTU est un rectangle.

b) Soit $\mathcal{A}(t)$ l'aire du rectangle RSTU. Montrer que $\mathcal{A}(t)=\frac{4}{3}t(\sqrt{3}-t)$

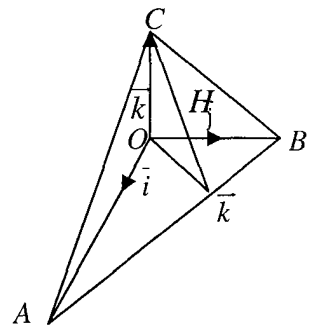
c) Pour quelle valeur du nombre réel t , l'aire $\mathcal{A}(t)$ est-elle maximale ? Quelle est alors la nature géométrique du quadrilatère RSTU ?

Exercice 24 : Dans l'espace ζ , rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points A(1,2,2) ; B(3,2,1) ; C(1,3,3) et E(2,0,4).

1) a) Montrer que les points A, B et C déterminent un plan P.

b)Montrer que la droite (AE) est perpendiculaire au plan P.c) Donner une équation cartésienne du plan P.
2)Pour tout réel m, on considère le plan Q_m dont une équation cartésienne est:$(m-1)x-(1+m)y+mz+2=0$
a) Montrer que, pour tout réel m, Q_m et P sont sécants.
b) Déterminer m pour que le point C appartienne à Q_m.
3) On pose $\Delta = Q_2 \cap P$.Montrer que le vecteur $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{k}$ est un vecteur directeur de Δ puis donner une représentation paramétrique de Δ.
4) a) Soit le point M(2k + 1,3,3 – K), où k est un réel. Déterminer k pour que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ soient orthogonaux.
b) En déduire la distance du point A à la droite Δ.

Exercice 25 : L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. Les points A , B et C sont définis par : $\overrightarrow{OA} = 3\vec{i}$; $\overrightarrow{OC} = \vec{k}$ *et* $OB = 2\vec{j}$. On note H le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC).
1) a) Montrer que le plan (ABC) à pour équation cartésienne $2x+3y+6z-6=0$
b) Montrer que les coordonnées du point H sont : $H\left(\frac{12}{49};\frac{18}{49};\frac{36}{49}\right)$
2) Montrer que H est l'orthocentre du triangle ABC.



Exercice 26 : Dans l'espace ζ rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.
On considère les points $A(1;0;1)$; $B(-1;2;2)$ et $C(-1;0;1)$
1) a) Vérifier que ABC est un triangle rectangle en C.
b) Déterminer une équation cartésienne du plan P contenant A, B et C.
2) Déterminer un système d'équations paramétriques de l'axe Δ du cercle (ABC)
3)Montrer que l'ensemble Q des points M de ζ tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = -3$ est un plan perpendiculaire à la droite (AB)
4) a) Vérifier que la droite Δ est parallèle au plan Q
b) Soit M un point quelconque de Δ Calculer la distance du point M à Q

Exercice 27 : L'espace ξ est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les plans
$P_0 : x-y+\sin^2\theta = 0$ et $Q_0 : y-z+\cos^2\theta = 0$ où θ est un réel.
1) Montrer que pour tout réel θ, les plans P_0 et Q_0 sont sécants suivant une droite Δ_θ.
2) Répondre par vrai ou faux et justifier votre réponse.
a)Le point $M(-1;-\cos^2\theta;0)$ est un point de Δ_0. b)Le vecteur $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$ est orthogonal à Δ_0.
c) Il existe θ tel que Δ_0 est perpendiculaire au plan R : x + y +z -1 = 0.
d) Il existe θ tel que Δ_0 est parallèle au plan $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Exercice 28 : $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère orthonormé de l'espace, on donne les points
$A(1,1,-1)$, $B(-1,0,1)$ et $C(0,1,1)$
1) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés puis écrire une équation cartésienne du plan (ABC)
2) soit la droite D dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 2\alpha \\ y = -2\alpha \\ z = -\frac{1}{4} + \alpha \end{cases}$

Montrer que D est l'axe du cercle ζ circonscrit au triangle ABC.

Exercice 29 : Dans l'espace ζ rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$. On considère les points $A\left(1;1;0\right)$; $B\left(1;0;1\right)$ et $C\left(0;1;1\right)$.1) Déterminer une équation cartésienne du plan P contenant A, B et C.

2) Vérifier que OABC est un tétraèdre régulier.

3) Soit Δ la droite passant par O et perpendiculaire à P. Déterminer les coordonnées du point d'intersection O' de Δ et P et prouver que O' est le centre de gravité du triangle ABC.

4) a) Déterminer une équation cartésienne du plan Q médiateur de $[OA]$

b) Montrer que Δ et Q se coupent et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection G. Calculer alors $\cos\left(\widehat{OGA}\right)$.

Exercice30: ABCDEFGH est un cube de coté1 cm. On donne le repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$

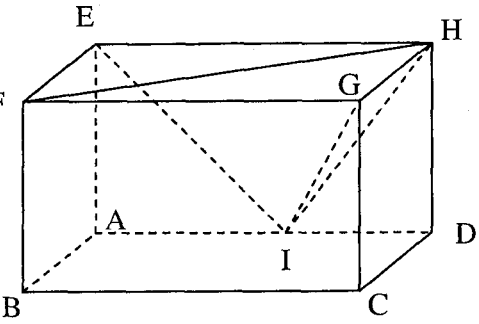
1) a) Donner les représentations paramétriques des droites (FD) *et* (BH)

b) Donner les coordonnées du centre O du cube.

2) a) Démontrer que le plan (EGB) et la droite (ED) sont orthogonaux.

b) Donner une équation cartésienne du plan (EGB)

Exercice 31: Soit ABCDEFGH un parallélépipède tel que $AB = AE = 1$ et $AD = 2$ .On désigne par I le milieu du segment $[AD]$. L'espace est muni d'un repère orthonormé $R\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AI};\overrightarrow{AE}\right)$.



1) a) Déterminer les coordonnées des points F, G et H.

c) Montrer que FIH est un triangle rectangle et calculer son aire.

2)a)Montrer qu'une équation du plan $P = (FIH)$ est : $2x + y - z - 1 = 0$

b) Déterminer alors la distance du point G au plan $P = (FIH)$

c) Déterminer les coordonnées du point K d'intersection de (AG) et du plan (FIH).

Exercice 32 : L'espace ξ est rapporté à un repère cartésien $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soit les droites $\Delta : \begin{cases} x = -\alpha \\ y = 2 + \alpha \quad \alpha \in \mathbb{R} \\ z = 1 + 3\alpha \end{cases}$ $\Delta' : \begin{cases} x = -\beta \\ y = 4 - \beta \quad \beta \in \mathbb{R} \\ z = 4 \end{cases}$

1) Montrer que Δ et Δ' sont deux droites sécantes puis déterminer leur point d'intersection.

2) Montrer qu'une équation cartésienne du plan P contenant Δ et Δ' est 3x-3y+2z+4=0.

3) On donne les points A (1, -1, 0), B (1, 1, 1) et C (2, 0, 1).a) Montrer que A, B, C déterminent un plan ξ.

b) Déterminer une équation cartésienne de ξ. c) Vérifier que P et ξ sont sécants.

d) Déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection D.

Résumé du cours

Définition 1: Soit A et B deux ensembles finis. Leur intersection $A \cap B$, qui se lit « A inter B », est l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B. les ensembles A et B sont dits disjoints lorsqu'ils n'ont aucun élément en commun. A et B sont disjoints équivaut à $A \cap B = \varnothing$

Définition 2: Soit A et B deux ensembles finis. Leur réunion $A \cup B$, qui se lit « A union B », est l'ensemble dont les éléments appartiennent à A ou à B.

Si A et B sont disjoints, alors $\text{card}(A \cup B) = \text{card}\,A + \text{card}\,B$.

Si A et B ne sont pas disjoints, alors $\text{card}(A \cup B) = \text{card}\,A + \text{card}\,B - \text{card}(A \cap B)$

Définition 3: Soit E un ensemble fini, de cardinal n et A une partie de E. le complémentaire $\overline{A}$ de A dans E est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A. on a alors : $A \cup \overline{A} = E$; $A \cap \overline{A} = \varnothing$; $\text{card}\,\overline{A} = n - \text{card}\,A$.

Définition 4: Le produit cartésien $E \times F$, se lit « E crois F », est l'ensemble des couples $(x;y)$ tels que x appartient à E et y appartient à F. On a : $\text{card}(E \times F) = \text{card}\,E \times \text{card}\,F$

Soit E un ensemble non vide et fini. Le produit cartésien $\underbrace{E \times E \times \ldots\ldots \times E}_{p\text{fois}}$ est l'ensemble des p-uplets $(x_1; x_2; \ldots; x_p)$ tels que x_i appartient à E. On le note E^p et on a $\text{card}(E^p) = (\text{card}\,E)^p$

Définition 5: Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n. on appelle permutation des n éléments de E tout n-uplets d'éléments distincts de E.

Définition 6: Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n et p un entier tel que $1 \le p \le n$. On appelle arrangement de p éléments de E tout p-uplets d'éléments distincts de E.

Théorème : Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n et p un entier tel que $1 \le p \le n$. Le nombre d'arrangement de p éléments de E est l'entier noté : A_n^p (On lit « A, n, p ») tel que

$A_n^p = n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ On convient que $A_n^0 = 1$

Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F. on dit que f est injective lorsque pour tous $x; x'$ de E tels que $x \neq x'$; on a $f(x) \neq f(x')$

Définition 7: Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n et p un entier tel que $0 \le p \le n$. On appelle combinaison de p éléments de E, toute partie à p éléments distincts de E. Le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments est l'entier naturel noté C_n^p (On lit « C, n, p ») ou $\binom{n}{p}$

Théorème : Soit n et p deux entiers naturels tels que $0 \le p \le n$. Alors $C_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!p!}$

Binôme de Newton : Soit a et b deux réels. Pour tout entier naturel non nul n, on a :

$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^n a^0 b^n$

LES EXERCICES

Exercice N° 1 :1)On veut placer quatre billes dans cinq trous de telle sorte qu'un trou reçoit au plus une bille. Le nombre de façons de placer ces quatre billes est :a) 4^5 ; b) A_5^4 ; c) C_5^4

2)Cinq enfants veulent s'asseoir sur un banc le nombre de manière de les disposer sur le banc est :

a) $5!$; b) 5^5 ; c) C_5^5

3)Dans un classe de 23 élèves on doit étire 2 délégués le nombre de choix possibles est :

a) C_{23}^2 ; b) A_{23}^2 ; c) 2^{23}

Exercice N°2 : Une urne contient dix boules numérotées de 1 à 12.

1) On tire successivement et sans remise 2 boules. Le nombre de tirages possibles est :

a) A_{12}^2 ; b) C_{12}^2 ; c) 2^{12}

2) On tire successivement et avec remise 5 boules. Le nombre de tirages possibles est :

a) A_{12}^5 ; b) C_{12}^5 ; c) 5^{12}

3) On tire simultanément 3 boules Le nombre de tirages possibles est :

a) A_{12}^3 ; b) C_{12}^3 ; c) 3^{12}

4) Le nombre d'anagrammes du mot ACADEMIE est égal à

a) 1680 b) 10080 c) 40320

5) Pour tout entier naturel non nul n, la somme $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n$ est égal à :

a) 2^n b) $n!$ c) n^2

6) Pour tout entier naturel n, $n! + (n+1)! = a)\ \dfrac{(n+2)!}{n+1}$, $b)\ (n+1)!$, $c)\ n!$.

Exercice 3 :Trente voyageurs prennent le même bus qui va s'arrêter dans dix stations.
De combien de façon peut-on envisager les descentes des voyageurs ?

Exercice 4 :un sac contient : cinq boules rouges numérotée 0, 0, 1, 2,2
Trois boules blanches numérotée 0, 1, 2
Deux boules jaunes numérotée 0, 4

On tire simultanément trois boules de sac. Dénombrer les tirages dans chacun des cas suivants :

a) Obtenir trois boules de même couleur
b) Obtenir une seule boule jaune
c) La somme des trois numéros inscrits sur les boules tirées est égale à 5
d) Le produit des trois numéros obtenus est nul

Exercice 5 :Une urne contient dix jetons dont quatre sont blancs et six rouges.

1) On tire successivement et sans remise trois jetons de l'urne.
a) Quelle est le nombre des tirages possibles ?
b) Quelle est le nombre des tirages comprenant des jetons de même couleur ?
c) Quelle est le nombre des tirages comprenant les deux couleurs ?
d) Quelle est le nombre des tirages comprenant exactement deux jetons rouges ?
2) Répondre aux mêmes questions dans le cas où l'on tire trois jetons successivement et avec remise.

Exercice 6 :Quatre garçons et deux filles s'assoient sur un banc.

1) Quelle est le nombre de dispositions possibles ?

2) Quel est le nombre de dispositions si les garçons sont d'un cote et les filles d'une autre.
3) Quel est le nombre de dispositions si chaque fille est intercalée entre deux garçons.
4) Quel est le nombre de dispositions si les filles veulent rester l'une a cote de l'autre.

Exercice7 **:**On forme un jury composé de cinq membres pris dans une liste de dix hommes et sept femmes.
1) Quelle est le nombre de jurys que l'on peut former ?
2) Quelle est le nombre de jurys comprenant trois hommes et deux femmes?
3) Quelle est le nombre de jurys ne comprenant aucune femme ?
4) Quelle est le nombre de jurys comprenant au moins une femme ?
5) Quelle est le nombre de jurys comprenant au plus une femme ?

Exercice 8 **:**On forme un comité de quatre membres choisis parmi sept personnes dont deux sont frères.
1) Combien de comités peut on former ?
2) Combien de comités comprenant les deux frères peut-on former ?
3) Combien de comités comprenant un seul des deux frères peut-on former ?
4) Combien de comités ne comprenant aucun des deux frères peut-on former ?
5) Combien de comités comprenant au moins l'un des deux frères peut-on former ?

Exercice 9 **:**1) Montrer que pour tout entier naturel $k, (k+1)!-k!=k\times k!$

2) En déduire que pour tout entier naturel $n, n!-1=1\times 1!+2\times 2!+...+(n-1)\times(n-1)!$.

Exercice 10:La fabrication d'une pièce nécessite de passer celle-ci sur quatre machine A, B, C et D.
Dénombrer les trajets possibles dans chacun des cas suivants :
a)l'ordre de passage est indifférent b) la pièce doit d'abord passer par A.
c)la pièce doit passer en B avant C et D.

Exercice 11 **:**Dans un restaurant on peut servir cinq plats P_1, P_2, P_3, P_4 et P_5. Quatre clients se présentent et choisissent chacun un plats et un seul.
1) De combien de façon peut-on les servir ?
2) De combien de façon peut-on les servir sachant que les plats choisis sont différents.
3) Sachant que le plats P_1 est choisis par deux client et seulement deux, déterminer le nombre de façons de servir les quatre clients.

Exercice 12 :Le cadron d'un appareil téléphonique comporte les chiffres de 0 à 9.
Le numéro de téléphone se compose de cinq chiffres, le premier chiffre n'étant pas zéro.
1) Combien de numéros de téléphone existe-il ?
2) Combien de numéros commencent par 56 existe-il ?
3) Combien y-a-t-il de numéros composés de chiffres distinct ?

Exercice 13 **:**On veut colorier un rectangle divisé en huit carreaux. On dispose de trois crayons : un vert, un rouge et un noire. Chaque carreau est colorié par une couleur et une seule.
1) Dénombrer les cas possibles.
2) Dénombrer les cas où trois carreaux exactement sont rouges.
3) Dénombrer les cas où trois carreaux sont rouges, trois sont verts et deux sont noirs.
4) Dénombrer les cas comprenant deux couleurs seulement.

Exercice 14:1) Soit $n \geq 4$. a) Quel est le nombre de diagonales d'un polygone à n cotés ?
b) Quels polygones ont autant de diagonales que de coté ?
2) On donne n points distincts sur un cercle ($n \geq 4$). a) Combien de cordes définissent-ils ?
b) On suppose que ces cordes se coupent en des points distincts à l'intérieur de cercle.
Combien y-a-t-il de points d'intersection ?

Exercice 15: Une urne contient dix jetons dont quatre sont blancs et six rouges.
1) On tire successivement et sans remise trois jetons de l'urne.
a) Quelle est le nombre des tirages possibles ?
b) Quelle est le nombre des tirages comprenant des jetons de même couleur ?
c) Quelle est le nombre des tirages comprenant les deux couleurs ?
d) Quelle est le nombre des tirages comprenant exactement deux jetons rouges ?
2) Répondre aux mêmes questions dans le cas où l'on tire trois jetons successivement et avec remise.

Exercice N° 16 : Pour un groupe d'élèves donné, combien y'a-t-il de classements sans ex-æquo par ordre de mérite ? On note N_k le nombre de classements possibles sans ex-æquo de k élèves.

Pour un groupe $E_2 = \{A;B\}$ de deux élèves il y a deux éléments possibles que nous noterons $(A;B)$ et $(B;A)$ dans ce cas $N_2 = 2$.

1) Le groupe comprend 3 élèves, il est noté $E_3 = \{A;B;C\}$.

Trouver N_3 (Représenter à l'aide d'un arbre)

2) Le groupe comprend 4 élèves, il est noté $E_4 = \{A;B;C;D\}$.

Trouver N_4 (Représenter à l'aide d'un arbre)

3) Quelle relation y'a-t-il entre N_2 et N_3 ?entre N_3 et N_4

4) a) Quelle relation prévoyez-vous entre N_{k-1} et N_k.

b) Calculer alors N_k en fonction de k pour tout $k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

Exercice 17 jamel a une carte bleue avec un code à quatre chiffres.
Il se souvient que ce code commence par 1 et se termine par 5.
Il se souvient aussi que les deux autres chiffres ne sont pas les mêmes.
1. Combien y-a-t-il de tels codes possibles?
2. Il se souvient de plus que la somme des quatre chiffres fait 8. Il prétend alors qu'en deux tentatives il est sûr de retrouver son code.
A-t-il raison?

Exercice N°18 : Quatre joueurs d'escrime A ; B ; C et D laissent, après la séance d'entraînement du matin, leurs épées numérotées chez le gardien du club. Celui-ci s'amuse è enlever les numéros et rend au hasard les épées aux quatre joueurs avant la séance de l'après-midi.
1) Dénombrer tous les cas possibles.
2) Dénombrer les cas possibles si :a) Le joueur A est le seul à retrouver son épée.
b) Un seul joueur retrouve son épée
c) Aucun joueur ne retrouve son épée (on pourra dresser l'arbre des choix)

Exercice n°19: Un sac contient neuf jetons répartis comme suit : Quatre jetons blancs marqués : M,A,T,H
Cinq jetons rouges marqués : 1,2,3,4,5
1) On tire simultanément cinq jetons du sac. Dénombrer les tirages dans chacun des sacs suivants :
a)Obtenir exactement deux jetons blancs. b)Obtenir au moins deux jetons rouges.
c)La somme des chiffres marqués sur les jetons rouges tirés est égale à 8.
2) On tire successivement sans remise tous les jetons du sac .
Dénombrer les tirages dans chacun des cas suivants :

a) Le premier jeton tiré est marqué A.
b) Obtenir consécutivement et dans cet ordre : M ,A,T,H

c) Obtenir consécutivement les jetons blancs.
d) Obtenir des lettres et des chiffres alternés.
e) Parmi les cinq premiers jetons tirés, il y a exactement deux jetons blancs.

Exercice 20 : On donne un entier naturel non nul n et les sommes :

$$S = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + ... + (-1)^p C_n^p + ... + (-1)^n C_n^n$$

et $S' = \frac{1}{0!n!} - \frac{1}{1!(n-1)!} + \frac{1}{2!(n-2)!} + ... + (-1)^p \frac{1}{p!(n-p)!} + ... + (-1)^n \frac{1}{n!0!}$ Calculer S ; en déduit S'.

Exercice 21: 1) Montrer que pour tout entier naturel n et p tels que $1 \le p \le n$, $pC_n^p = nC_{n-1}^{p-1}$

2) En déduire que pour tout entier naturel $n \ge 1$, $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + nC_n^n = n2^{n-1}$

Exercice 22: Soit n un entier naturel. Calculer :

$$A = C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2C_n^2 + ... + 2^n C_n^n \ ; \quad B = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + ... + (-1)^n C_n^n$$

Exercice 23 : Soit n un entier naturel non nul. Calculer la somme :

$$S = A_n^0 + \frac{3}{1!}A_n^1 + \frac{3^2}{2!}A_n^2 + \frac{3^3}{3!}A_n^3 + ... + \frac{3^n}{n!}A_n^n$$

Exercice n°24: Soit n et p 2 entiers naturels tels que : $3 \le p \le n$.

Montrer que : $C_n^p = C_3^0\ C_{n-3}^p + C_3^1 C_{n-3}^{p-1} + C_3^2 C_{n-3}^{p-2} + C_3^3 C_{n-3}^{p-3}$.

Exercice 25 : Soit la fonction $f : x \mapsto \left(1 - \frac{1}{x}\right)^n$ où $(n \in \mathbb{N}^*)$

1) Développer $f(x)$; en déduire que :

$$3^n C_n^0 - 3^{n-1}.C_n^1 + 3^{n-2}.C_n^2 + ... + (-1)^p .3^{n-p}.C_n^p + ... + (-1)^n .C_n^n = 2^n$$

2) Calculer $f'(x)$ de deux manières différentes, en déduire que : $\sum_{p=1}^{n}\left(\frac{(-1)^{p+1}.p.C_n^p}{3^{p-1}}\right) = n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

Exercice 26: pages d'un livre sont numérotées de 1 à 999.
Quel est le nombre de chiffres total écrit pour la pagination?
Combien de fois le chiffre 7 a-t-il été utilisé? et le chiffre 0?

Exercice 27: On dispose de 100 cartes. Sur chacune sont écrits deux entiers consécutifs, de sorte que chacun des entiers 1,2,3,...,199,200 est écrit sur une et une seule carte.

1) Maram a choisi 21 cartes au hasard. Elle fait la somme de tous les entiers écrits sur ses cartes et annonce à abrar que cette somme est égale à 2004.
Prouver que Maram s'est trompée dans son calcul.

2) Maram recompte et annonce 2005. Prouver qu'elle s'est à nouveau trompée dans son calcul.

3) En fait le total de Maram est 2003. Pendant ce temps, abrar a choisi 20 cartes au hasard parmi celles qui restaient.

Exercice 28 : Sur cette île chaque jour et dans cet ordre, chaque loup tue un mouton, chaque mouton tue un serpent et chaque serpent tue un loup.
Après dix jours il ne reste plus sur l'île qu'un mouton et aucun autre animal.
Combien y avait-il d'animaux de chaque espèce au départ?

Exercice29 : Sur le courrier que vous recevez par la poste vous avez peut-être remarqué une série de bâtonnets de couleur orange inscrits en bas à droite des enveloppes.

Il s'agit en fait d'un codage du code postal utilisé pour le tri automatique du courrier.
Le tableau ci-dessous vous montre 5 exemples de code postal avec leur codage en bâtonnets.
Examinez les attentivement afin de trouver quel code postal est représenté par la dernière série de bâtonnets.

Code postal	Codage en bâtonnets
51100	‖‖‖ ‖‖‖ ‖ ‖‖‖ ‖ ‖‖‖ ‖ ‖‖
52130	‖‖‖ ‖‖‖ ‖ ‖ ‖‖‖ ‖ ‖‖‖ ‖ ‖‖
08400	‖‖‖ ‖‖‖‖ ‖‖‖‖ ‖ ‖ ‖‖‖
75006	‖ ‖‖ ‖ ‖‖‖ ‖‖‖‖ ‖ ‖‖‖ ‖‖
13007	‖‖ ‖‖ ‖‖‖ ‖‖‖ ‖‖‖ ‖ ‖ ‖‖‖
?	‖‖‖ ‖ ‖‖‖ ‖‖‖ ‖‖ ‖‖‖‖‖ ‖

Exercice N° 30: Soient n ; m et p 3 entiers naturels tels que $p \leq m ; p \leq n$.

1) Quel est le coefficient de x^p dans chacun des deux développements de : $(1+x)^n.(1+x)^m$ et $(1+x)^{m+n}$

2) En déduire que : $C_{m+n}^p = C_n^0 C_m^p + C_n^1 C_m^{p-1} + ... + C_n^{p-1} C_m^1 + C_n^p C_m^0$

3) En déduire que : $C_{2n}^n = \left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + ... + \left(C_n^n\right)^2$

Exercice 31: Les faces d'un dé en forme de tétraèdre régulier sont numérotées de 1 à 4.
Le dé est posé sur une table, face "1" contre cette table.
Une étape consiste à faire basculer le dé autour de l'une quelconque des arêtes de sa base.
A l'issue de chaque étape, on note le numéro de la face contre la table. On fait la somme S de tous ces nombres après 2001 étapes, en comptant aussi le"1" initial.
1) Donner la valeur maximale et la valeur minimale que l'on peut ainsi obtenir pour S.
2) La somme S peut-elle prendre toutes les valeurs entières entre ces 2 valeurs?

Exercice 32 Au rugby, après décision de l'arbitre, les équipes marquent des points lors de trois phases de jeu En réussissant un coup de pied de pénalité pour 3 points, En réussissant un drop pour 3 points, En marquant un essai qui sera soit « transformé » soit « non transformé »
s'il est « transformé » il rapporte 7 points, s'il est « non transformé ». il rapporte 5 points.
1. neji affirme que son équipe a marqué 27 points grâce à deux essais. Est-ce possible? Justifier.
2. kamel rapporte que son équipe a marqué 36 points grâce à quatre essais et plusieurs pénalités. Combien de ces essais ont été « transformés »
3. Une équipe a marqué 30 points, trouver toutes les manières dont ces 30 points ont pu etre obtenus.
4. Quels sont les scores impossibles au rugby?

Exercice 33 : On dispose de 7 objets que l'on répartit en autant de tas que l'on veut, chaque tas contenant autant d'objets que l'on veut.

Une manipulation consiste à enlever un objet de chaque tas et à faire un nouveau tas des objets ainsi récupérés.

Exemple : une répartition possible au départ sera notée (4)(3) : elle signifie qu'on a deux tas, l'un de quatre objets, l'autre de 3 objets et après une manipulation on obtiendra la répartition (3)(2)(2).

Avertissement : bien entendu,ce qui importe dans une répartition, c'est son nombre de tas et le nombre d'objets par tas : donc on considère que les répartitions (4)(3) et (3)(4) sont identiques. De même les répartitions (3)(2)(2), (2)(3)(2) et (2)(2)(3) sont identiques.

D'ailleurs une façon unique de noter une répartition est d'indiquer ses tas par valeurs décroissantes de leurs nombres d'objets : (3)(2)(2).

1) On place les 7 objets en un seul tas : la répartition est donc (7).

Quelle répartition obtiendra-t-on après 3 manipulations? Après 7 manipulations? Après 2007 manipulations?

2) Ici, on ne connaît pas la répartition initiale, mais après 2007 répartitions, on obtient la répartition (4)(2)(1). Indiquer toutes les répartitions initiales possibles.

3) Paul et Virginie jouent ensemble. Au départ, Paul dispose les objets sans montrer la répartition à Virginie. Puis il simule sur son ordinateur 2007 manipulations et ne montre à Virginie que la répartition finale.

Il demande alors à Virginie de deviner la répartition initiale.

Virginie réfléchit et avoue ne pas savoir répondre car elle hésite entre trois répartitions.

Sachant que Virginie a raisonné correctement, quelle répartition finale a-t-elle vue?

Exercice N° 34:

Un bus effectue la navette entre 2 points A et D ; il ne marque que 2 arrêts (notés B et C dans cet ordre lors du trajet aller) entre les terminus A et D en parcourant ainsi 3 sections.

Un contrôle effectué sur un aller-retour A-D donne les informations suivantes :

--- pour le trajet aller A-D :

- 6 voyageurs sont montés en B et 5 en C
- 3 voyageurs sont descendus en B et 9 en C
- 12 voyageurs ont fait tout le trajet aller
- un seul voyageur n'est ni monté en A, ni descendu en D

--- pour le trajet retour D-A :

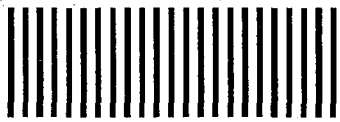
- 9 voyageurs en tout sont montés en C ou en B
- 7 voyageurs en tout sont descendus en C ou en B
- 4 voyageurs ont parcouru une seule section quelconque
- 10 voyageurs ont parcouru 2 sections successives
- 16 voyageurs ont parcouru les 3 sections

Quel doit être le nombre minimum de places assises dans ce bus pour que jamais personne ne reste debout

Exercice35 Jeu de « Nîmes »

Règles du jeu

- C'est un jeu à deux joueurs.
- Face à un alignement de bâtonnets, chacun doit, à tour de rôle, retirer 1, 2 ou 3 bâtonnets, au choix.
- Celui qui ne peut plus jouer a perdu.



exemple avec 23 bâtonnets

Vous etes opposé à un adversaire (c'est en fait un ordinateur!).
Partie A il reste 6 bâtonnets, c'est à votre tour de jouer.
1. Décrire deux parties possibles, l'une où vous gagnez, l'autre où vous perdez.
2. Élaborer la stratégie gagnante (c'est-à-dire quel(s) coup(s) jouer pour etre sûr(e) de gagner la partie quoique fasse l'adversaire).
Partie B Avec n bâtonnets, c'est à vous de jouer.
1. Pour n = 101, quelle est la stratégie gagnante?
2. Si n est un nombre entier non nul, existe-t-il une stratégie gagnante? Partie C Avec n bâtonnets et une nouvelle règle du jeu.
Dans cette partie, on modifie la règle du jeu : les joueurs ne peuvent retirer, à chaque tour, que 2 ou 3 bâtonnets. (On n'a plus le droit de retirer un seul bâtonnet) Vous commencez la partie.
Pour quelle(s) valeur(s) de n y a t'il une stratégie gagnante?
Partie A il reste 6 bâtonnets, c'est à votre tour de jouer.
1. Décrire deux parties possibles, l'une où vous gagnez, l'autre où vous perdez.
2. Élaborer la stratégie gagnante (c'est-à-dire quel(s) coup(s) jouer pour etre sûr(e) de gagner la partie quoique fasse l'adversaire).

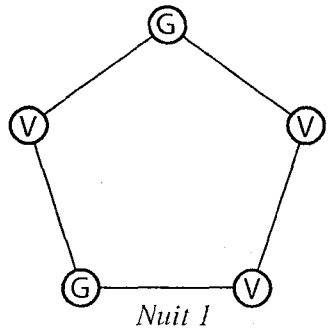
Exercice 36:Les informations du journaliste ont été mal retranscrites à l'impression. La dernière information n'est pas passée, et voici ce qu'ont appris les lecteurs du journal

- Arthur, qui était arrivé troisième l'an dernier, a amélioré son classement
- Béatrice n'est arrivée ni deuxième, ni troisième
- Diego n'est pas arrivé dernier
- Erwan est arrivé dans les quatre premiers
- Fabrice a battu Caroline de trois places
- Le véliplanchiste arrivé en quatrième position n'est ni Béatrice, ni Arthur.

Les lecteurs ne sont pas tous d'accord quant au classement de la course...
Combien y a-t-il de possibilités de classement, au regard de ces seules informations?
Quels sont les classements possibles?

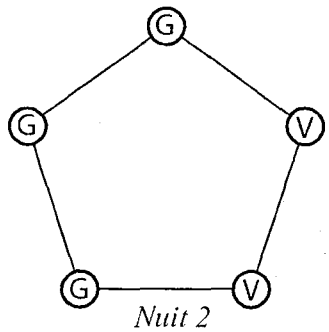
Exercice 37:La Foire Internationale de l'Automate Cellulaire se compose de plusieurs bâtiments polygonaux. À chaque sommet de ces polygones. il y a un poste de garde. Chaque soir un poste de garde peut etre occupé. ou non, par un gardien. La première nuit, le Directeur de la FIAC décide quels postes vont etre occupés. Puis la répartition des gardiens se fait ainsi
- Si lors de la nuit n, les deux sommets adjacents à un poste étaient tous deux vacants, ou tous deux occupés, alors ce poste sera occupé lors de la nuit suivante n + 1.
- Si, au contraire, lors de la nuit n, les deux sommets adjacents à un poste étaient l'un occupé et l'autre non, alors ce poste ne sera pas occupé lors de la nuit n + 1.

Exemple : Le bâtiment A est un pentagone. On convient de noter G les postes occupés par un gardien et V les postes vacants.



Nuit 1

Le directeur décide de la position suivante



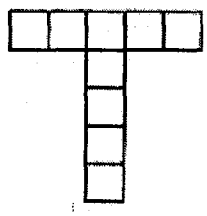
Nuit 2

La nuit suivante, on obtient la configuration

1. Déterminer les configurations obtenues dans le bâtiment A pour les nuits 3, 4, 5 et pour la nuit 10.
2. Dans le bâtiment B qui compte 2010 sommets, le directeur place un seul gardien pour la nuit 1 (les 2009 autres postes étant donc vacants). Combien seront-ils pour la nuit 8? pour la nuit 99?
3. Dans le bâtiment C, superbe octogone (huit sommets), le directeur constate avec affolement lors de la nuit 3 qu'il n'y a plus aucun gardien! Combien en avait-il pourtant postés lors de la nuit 1?
4. Le bâtiment D est un heptagone (sept sommets). Le directeur a choisi une disposition des gardes pour la nuit 1. Lors de la nuit 2, les gardes du bâtiment D sont-ils en nombre pair?
5. Dans le bâtiment E (neuf sommets), le directeur constate après une semaine que la disposition lors de la nuit 8 est rigoureusement identique à celle choisie lors de la nuit 1, et que l"un des postes de garde n'a jamais été occupé durant cette période. Combien de gardiens le directeur avait-il postés lors de la nuit 1 ?

Exercice 38: On dispose :

* d'un damier carré formé de petits carrés identiques ;
* d'une pièce d'un seul tenant obtenue en accolant successivement par au moins un côté 9 petits carrés identiques à ceux du damier.



Le problème consiste à poser plusieurs exemplaires identiques de cette pièce sur le damier en respectant les règles suivantes :

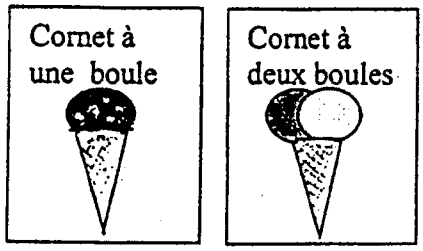
* chaque exemplaire peut être tourné ou retourne ;
* chaque petit carré constituant les exemplaires recouvre exactement un petit carré du damier ;
* deux exemplaires ne peuvent pas se chevaucher.

1) Dessiner l'une des solutions si on pose quatre exemplaires de la pièce représentée ci-contre
2) Montrer que, quelle que soit la forme de la pièce de départ, il est possible de poser deux exemplaires de cette pièce en respectant les règles ci-dessus.
3) Peut-on dans la question précédente remplacer deux par trois, par quatre, par cinq, etc. ?

***Exercice* 39** Abrar dispose de deux jeux de onze cartes numérotées de 1 à 11 et telles que deux cartes portant le même numéro soient absolument indiscernables. Elle distribue toutes ses cartes entre trois de ses amis :maram , rawen et yousef de telle sorte que chacun reçoive au moins une carte.
De combien de façons différentes Abrar peut-elle faire cette distribution ?

Exercice 40:Quatre locataires A, B, C et D laissent, en sortant, la clef numérotée de leur appartement à la gardienne de l'immeuble .Celle-ci s'amuse à enlever les numéros et rend au hasard les clefs aux quatre personnes à leur retour. Quel est le nombre des cas dans lesquels :
a)Les quatre personnes retrouve leur clefs ? b) Deux personnes seulement retrouvent leur clefs ?
c)Le locataire A est le seul qui a trouve sa clef ? d) Une personne seulement retrouvera sa clef ?

Exercice 41 : Un marchand de glaces propose six parfums au choix.
1)Quatre clients choisissent, au hasard et indépendamment, un des parfums proposés.
a)Déterminer le nombre de choix possibles.
b)Déterminer le nombre de choix dans chacun des cas suivants :
A:« les quatre clients choisissent le même parfum ».
B:« les quatre clients choisissent des parfums deux à deux différents ».
C:« deux parfums et deux seulement sont choisis ».
2) Maintenant le marchand leur propose des cornets à une boule ou à deux boules.Le cornet à deux boules contient deux parfums distincts.
Déterminer le nombre de choix possibles dans chacun des cas suivants :
D : « les quatre clients ont choisi des cornets à deux boules ».
E : « Un seule client a choisi un cornet à deux boules ».



Exercice 42 :Montrer que : $C_{2n}^{n}+C_{2n}^{n+1}+C_{2n+1}^{n+2}=C_{2(n+1)}^{n+2}=C_{2(n+1)}^{n}$

Exercice 43 : Quatre amis se rendent dans un complexe de quatre salles de cinéma.
Chacun choisit au hasard une salle.
1) Déterminer le nombre de choix possibles.
2) Déterminer le nombre de choix possibles de chacun des cas suivants :
a) Les quatre amis se retrouvent dans des salles différentes.
b) les quatre amis se retrouvent dans la même salle.
c) les quatre amis se retrouvent exactement dans deux salles.
d) Une seule salle n'est pas choisit par les quatre amis.

Exercice 44: **A-** Douze touristes : quatre Irakiens, cinq Libanais et trois Egyptiens, veulent participer à un jeu organisé par l'hôtel où ils demeurent. Ils doivent ainsi former une équipe de quatre joueurs, choisis au hasard. Dénombrer les équipes comprenant :1) Exactement trois Libanais. 2) Au moins deux Egyptiens.
3) Au plus un Irakien. 4)Les trois nationalités.

B- Ces touristes décident de visiter quatre boutiques d'un centre commercial : B_1, B_2, B_3 et B_4.
Dés leur arrivée, ils visitent chacun boutique. Dénombrer les possibilités dans chacun des cas suivants :
1)Les douze touristes visitent la même boutique.
2) la boutique B_4 est visitée par quatre touristes et quatre seulement.
3)Deux boutiques et deux seulement sont visitées par les douze touristes.

Exercice 45 Amir possède une encyclopédie constituée de n tomes, où n est un entier compris entre 5 et 20 : Tous les tomes ont le même nombre de pages. La numérotation de chaque tome commence à la page 1. Toutes les pages sont numérotées. Pour numéroter la totalité des n tomes, on a utilisé 2006 fois le chiffre 5.
De combien de tomes est constituée l'encyclopédie de Amir ?
De combien de pages est constitué chacun des tomes ?

LES EXERCICES

Exercice N° 1 : Soit la série statistique : 12,10,8,6,8,7,18,5, 5, 16,16,15,6,5,5

1) Déterminer la mode, la médiane, les quartiles et l'écart inter quartile

2) Déterminer la moyenne et l'écart type de cette série (arrondie au centaine)

Exercice N° 2 : Les notes de 18 élèves en mathématique sont

11, 9,9, 15, 8, 19, 18, 16, 18, 9, 5,4, 4, 12, 15, 9 ,9 ,16.

1) Ecrire les notes dans l'ordre croissant

2) Déterminer la note médiane

3) Déterminer le premier et le troisième quartiles des notes et l'écart interquartile de cette série.

4) Préciser la population sur la quelle porte l'étude statistique

Exercice N° 3: Une entreprise de dépannage veut réduire les frais d'essence de ses 40 véhicules en remplaçant le quart des véhicules qui circulent le plus, par des véhicules diesel et le quart des véhicules qui circulent le moins par des véhicules plus légers.

Pour cela le comptable a relevé le kilométrage de chaque véhicule pendant une semaine.

On a obtenu les nombres suivants, en Kilomètres :

438 ; 770 ; 226 ; 479 ; 685 ; 525 ; 374 ; 591 ; 690 ; 810 ; 587 ; 213 ; 690 ; 853 ; 421 ; 352 ; 511 ; 260 ; 586 ; 675 ; 949 ; 505 ; 383 ; 420 ; 642 ; 280 ; 750 ; 573 ; 332 ; 694 ; 553 ; 490 ; 410 ; 628 ; 731 ; 390 ; 612 ; 484 ; 580 ; 545.

1) Ranger les données dans des classes d'amplitude 100 Km. La première classe est $[200;300[$.

2) Construire le polygone des effectifs cumulés croissants.

3) a) Déterminer la médiane et les quartiles de cette série.

b) Utiliser ces résultats pour réduire les frais de l'entreprise.

4) Calculer le Kilométrage moyen de l'ensemble des véhicules pendant une semaine.

5) Calculer la variance et l'écart type de cette série.

Exercice N°4 :

Groupe d'âge	[15,25[	[22,35[	[35,45[	[45,55[	[55,65[	[65,75[	75 ans et plus	Total
Nombre de chefs de ménages	29391	304255	350086	296121	261308	147789	67856	145806

1) Calculer l'écart type σ de cette série.

2) Donner une valeur approchée du nombre de chefs de ménages dont l'âge X(en années) satisfait à :

$\bar{x} - \sigma \langle x \langle \bar{x} + \sigma$ avec $\bar{X}$ Étant la moyenne arithmétique de la série.

Interpréter, en pourcentage, le résultat obtenu.

3) Déterminer le nombre de chefs de ménages dont l'âge X satisfait à la relation :

$\bar{x} - 2\sigma \leq x \leq \bar{x} + 2\sigma$ Interpréter, en pourcentage, le résultat, obtenu.

Exercice N°5 : On donne dans le tableau ci-dessous la répartition des voitures louées suivant la puissance (en chevaux CH) dans deux agences de location pendant un mois :

Puissance en CH		4	5	6	7	8	9
Nombre de voitures	Agence A	6	10	16	8	3	3
	Agence B	15	6	4	4	6	11

1) Déterminer les moyennes $\overline{X_A}$ et $\overline{X_B}$ des puissances utilisées respectivement dans les agences A et B (Tous les résultats de l'exercice sont à 0.01 prés)

2) a) Déterminer les écarts types σ_A et σ_B de chaque série.

b) Pour améliorer le parc de son agence, le chef de l'agence A décide d'acheter des voitures à 6 chevaux. Quelle puissance de voiture proposez-vous pour l'agence B.

Exercice 6 Un relevé statistique des tailles X en cm et des masses Y en kg d'un échantillon de 100 Collégiens a permis de construire le tableau suivant :

X \ Y	[40,45[	[45,50[	[50,55[	[55,60[
[150,155[	18	10	2	0
[155,160[	3	16	5	1
[160,165[	0	5	13	5
[165,170[	0	2	6	14

Déterminer la valeur moyenne et la variance de chacun des caractères X et Y.

Exercice N°7: On donne les deux séries suivantes :

Superficie en (hectares)	Pourcentage des exploitions	
	Région A	Région B
[1,5[	33	20
[5,10[	20	16
[10,20[	20	16
[20,50[	24	22
[20,50[	20	30
[50,200[	3	12
Totaux	100	100

1) Calculer les moyennes arithmétiques $\bar{x}$ et $\bar{y}$ des séries statistiques correspondantes respectivement aux régions A et B. Comparer $\bar{x}$ et $\bar{y}$ et interpréter le résultat.

2) Calculer les écarts type σ_A et σ_B des deux séries considérées. Comparer les dispersions des deux séries.

Exercice8 Le tableau suivant donne les recettes et dépenses en dinars d'une personne pendant 10 semaines.

Semaine	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Recette X_i	106	113	97	87	101	90	91	111	87	102
Dépense y_i	67	70	62	59	66	56	61	73	59	67

1)Représenter dans un repère orthonormé le nuage des points $M_i(x_i,y_i)$.

2)Déterminer les coordonnées du point moyen G. Placer G.

3)On partage le nuage de points en deux sous nuages : le premier de point moyen G_1 est constitué par les 5 points ayant les plus petites abscisses et le second de point moyen G_2 est constitué par les 5 autres points. Déterminer les coordonnées de G_1 et G_2.

4) Déterminer l'équation de la droite $(G_1\ G_2)$.

5)Estimer la dépense de cette personne si sa recette est de 120 dinars.

Exercice 9 Dans le tableau suivant on reporte le chiffre d'affaires annuel (en milliers de dinars) d'une entreprise (de 1998 à 2005)

Année	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Rang x_i de l'année	1	2	3	4	5	6	7	8
Chiffre d'affaire (y_i)	80	83	78	78	78	73	72	70

1)Représenter dans un repère orthonormé le nuage de points $M_i(x_i,y_i)$.
2)Déterminer les coordonnées de G_1 point moyen des quatre premiers points du nuage et de G_2 point moyen des quatre derniers.
3)Déterminer une équation de la droite (G_1G_2).
4)Déterminer graphiquement le chiffre d'affaires de l'entreprise pour l'année 2008.
5)Déterminer par le calcul en quelle année le chiffre d'affaires sera-t-il inférieur à 60.

Exercice n°10 :

Avant le lancement sur le marché d'un nouveau type de voiture, le constructeur doit procéder à certains essais, parmi lesquels celui de la consommation réelle de carburant (en litre par heures) en fonction de la vitesse (en km par heure). Six essais à différentes vitesses ont donné la série suivante :

Vitesse x (km/h)	50	70	90	120	140	160
Carburant y (L/h)	3	4	7,5	12	17	22

1) a- Représenter la série ci-dessous par un nuage des points $M_i(x_i, y_i)$ dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ convenablement choisi. Peut on raisonnablement procéder à un ajustement affine entre x et y.

b- On pose : $z = \sqrt{y}$. Représenter dans un nouveau repère la série (x,z) par un nuage des points. Est il plus indiqué de chercher un lien affine entre x et z ?

2) a- En notant G_1 et G_2 les points moyens respectivement des trois premiers couples (x_i, z_i) et des trois derniers, calculer les coordonnées de G_1 et G_2, puis établir l'équation de la droite (G_1G_2)

b- En déduire l'ajustement de x et y.

3) a- Que doit indiquer le constructeur pour la consommation à la vitesse de 100km/h.

b- A l'arrêt, mais le moteur tournant, il ne reste que 6 litres dans le réservoir : donner un exemple de distance que l'on peut parcourir en une heure à une vitesse constant que l'on précisera.

Exercice11: Le mur d'une habitation est constitue par une couche de béton et une couche de polystyrène d'épaisseur variable E (en cm). On mesurer la résistance thermique R (en cm². °C/W) de ce mur pour divers valeurs de E et on obtenu les résultats ci-dessous.

E	2	4	6	8	10	12	14	16	18
R	0,83	1,34	1,63	2,3	2,44	2,93	3,44	3,85	4,28

1)a) Calculer la moyenne et l'écart-type de la variable E
b) Calculer la moyenne et l'écart-type de la variable R
2)a) Représenter le nuage de points de la série double (E, R)
b) Placer le point moyenne du nuage
c) Donner un ajustement affine de la série double (E, R)
d) Quelle résistance thermique peut-on espérer obtenir avec une épaisseur de polystyrène de 25 cm.

Résumé du cours :

Définition : Lorsqu'on tire au sort un nombre, ou qu'on lance une pièce de monnaie ou un dé, il est impossible de prévoir le résultat, car ce résultat est soumis au hasard. On dit alors que le résultat est aléatoire. Les expériences telles que tirer au sort une question dans un examen, tirer au sort un nombre, lancer un dé non truqué ou une pièce de monnaie sont appelées expériences aléatoires ou épreuves.

Définition : Soit E l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire et $p(E)$ l'ensemble les évènements de E.

on appelle probabilité sur E, toute application p, de $p(E)$ dans $[0;1]$ telle que :

- $p(E)=1$
- L'image $p(A)$ d'un évènement A, est la somme des images des évènements élémentaires de A
- L'image $p(\varnothing)$ de l'ensemble vide est égal à 0.

Définition : Soit $E=(a_1;a_2;...;a_n)$ l'ensemble des issues et p une probabilité sur E. la probabilité d'un évènement élémentaire $\{a_i\}$ est notée $p(a_i)$ et on a $\sum_{i=1}^{n} p(a_i)=1$.

Définition : L'évènement complémentaire d'un évènement A est dit l'évènement contraire de A

Soit E un ensemble fini et p une probabilité sur E.

- Pour tout évènement A, $p(\overline{A})=1-p(A)$
- Pour tous évènements A et B, $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$
- Pour tous évènements incompatibles A et B, $p(A\cup B)=p(A)+p(B)$

Définition : Soit E un ensemble fini des issues dans une situation d'équiprobabilité. Si la cardinal de E est égal à N et si p est la probabilité sur E, on a :

- Pour tout évènement élémentaire a_i ; $p(a_i)=\frac{1}{N}$
- Pour tout évènement A, $p(A)=\frac{\text{card } A}{N}$

Définition : On considère une expérience, constituée de n épreuves successives. Soit A_1 un évènement réalisé avec la probabilité p_1 lors de la première épreuve, A_2 un évènement réalisé avec la probabilité p_2 lors de la deuxième épreuve, et A_n un évènement réalisé avec la probabilité p_n lors de la $n^{\text{ième}}$ épreuve.
On dit que les évènements sont indépendants si la réalisation de l'un n'influe pas sur la réalisation du suivant. Dans ce cas la probabilité pour que les évènements $A_1;A_2;.....;A_n$ soient successivement réalisés est égale à $p_1\times p_2\times...\times p_n$

On considère une expérience, constituée de n épreuves successives. A_1 un évènement réalisé lors de la première épreuve, A_2 un évènement réalisé lors de la deuxième épreuve, et A_n un évènement réalisé lors de la $n^{\text{ième}}$ épreuve. On dit que les évènements sont dépendants si la réalisation de l'un influe sur la réalisation du suivant. Soit p_1 la probabilité de A_1 ; p_2 la probabilité de A_2 et p_n la probabilité de A_n. Si A_{n-1} se réalise. Alors la probabilité pour que les évènements $A_1;A_2;.....;A_n$ se réalisent successivement est égale

LES EXERCICES

Exercice 1: Indiquer la bonne réponse par a, b, ou c avec justification.

1) On lance un dé équilibré, la probabilité d'obtenir un nombre supérieur à 3 est :

$\boxed{a}\ \frac{1}{2}$; $\boxed{b}\ \frac{2}{3}$; $\boxed{c}\ \frac{1}{6}$

2) On lance deux dés parfaits, on note S la somme des points marqués,

On note A l'évènement 'S=5' alors p(A)= a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{9}$ c= $\frac{1}{11}$

3) A et B sont deux événements incompatibles :

$p(A)=0,10$ et $p(B)=0,58$ alors $p(A\cup B)$ est égale à : $\boxed{a}$ 0,32 ; $\boxed{b}$ 0,68 ; $\boxed{c}$ 0,58

4) A et B deux évènements incompatibles et p(A)=p(B)=0.2 alors $p(A\cup B)=...$

a) 0.2 b) 0.3 c) 0.4

5) L'événement A à pour probabilité $\frac{1}{4}$ alors $p(\overline{A})$ est égale à : $\boxed{a}$ 0,25 ; $\boxed{b}$ 0,75 ; $\boxed{c}$ 0,5

6) A et B deux événements de Ω tel que $p(A)=\frac{3}{4}$; $p(B)=\frac{1}{4}$ alors $A\cup B$:

$\boxed{a}$ égal à Ω $\boxed{b}$ $A\cup B$ n'est jamais égale à Ω $\boxed{c}$ $A\cup B$ peut être égale à Ω

7) Une urne contient 5 boules blanches et 5 boules noires. On tire successivement et avec remise une boule au hasard n fois de suite $(\text{avec } n\geq 2)$. La probabilité d'obtenir des boules qui ne soient pas de même couleur est : a) $-\frac{1}{2^n}$; b) $1-\frac{1}{2^{n-1}}$; c) $1-\frac{1}{2^{2n}}$

Exercice 2 : Une urne contient 6 boules blanches et 4 boules rouges, on effectue des tirages dans cette urne, chacune des 10 boules ayant la même probabilité d'être tirée.

1) On tire simultanément 5 boules. Quelle est la probabilité d'obtenir :

a)Trois boules blanches et deux boules rouges. b) Au moins une boules rouge.

2) On tire maintenant successivement 5 boules, la boule tirée étant remise dans l'urne après chaque tirage. Quelle est la probabilité d'obtenir :

a) Trois boules blanches et deux boules rouges. b) Au moins une boules rouge.

2) On tire maintenant successivement 5 boules, la boule tirée étant remise dans l'urne après chaque tirage. Quelle est la probabilité d'obtenir :a) Trois boules blanches et deux boules rouges dans cette ordre ?

b) Trois boules blanches et deux boules rouges ?

Exercice 3: Une urne contient 5 boules : Trois boules vertes porte respectivement les numéros 1,2 et 3 et deux boules rouges portent respectivement les numéros 1 et 2.

On tire au hasard et simultanément deux boules de cette urne.

1) Quelle est la probabilité de l'événement :A :« les deux boules tirées sont de la même couleur»

2) On appelle B : « la somme des numéros portés par chacune des deux boules tirées est égale à 3» Calculer la probabilité de B.

3) Déterminer la probabilité des événements : $A\cap B$; $A\cup B$; $\overline{A}\cap B$; $A\cup\overline{B}$

Exercice 4 : Une urne contient 5 boules rouges numérotées :1,1,1,0,0 et 4 boules vertes numérotés :1,1,1,0.

L'épreuve consiste à tirer simultanément trois boules de l'urne

1) Calculer la probabilité des événements :

A : « obtenir 3 boules de la même couleur» B : « obtenir 3 boules portant le même numéro»
2) Calculer la probabilité d'avoir 3 boules de la même couleur ou trois boules portant le même numéro.
3) Calculer la probabilité d'obtenir au plus une boule verte.

Exercice 5 :On jette trois dés cubiques non pipés dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
Calculer la probabilité des événements suivants : 1) A : « obtenir une seule fois le numéro 1»
2) B: « obtenir au moins une fois le numéro 1» . 3) C: « obtenir trois nombres distincts »
4) D: «obtenir au moins deux nombres identiques ». 5) E : « obtenir exactement deux nombres identiques».
6) F : « obtenir une somme pair » . 7) G : « obtenir une somme supérieur ou égale 16 ».

Exercice 6 :Dans un lycée 28% des élèves aiment la musique, 22% aiment le sport et 18% aiment le sport et la musique .Un élève est choisit au hasard
1)Quelle est la probabilité qu'il aime la musique ou le sport
2)Quelle est la probabilité pour qu'il n'aime ni la musique ni le sport
3)Quelle est la probabilité qu'il aime la musique et n'aime pas le sport

Exercice 7 : Deux lignes téléphoniques A et B arrivent à un standard. On note les évènements : E_1 :" La ligne A est occupée" et E_2 :"La ligne B est occupée". On donne $p(E_1)=\frac{1}{2}$; $p(E_2)=\frac{3}{5}$ et $p(E_1\cap E_2)=\frac{3}{10}$.
Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
1) E :" La ligne A est libre" 2) F :" Au moins une ligne est occupée"
3) G :" Au moins une ligne est libre" 4) H :" Une seule une ligne est occupée".

Exercice 8 :18 personnes se sont présentées à une collecte de sang et on a noté :
11 personnes du groupe A ; 2 personnes du groupe B ;4 personnes du groupe O ; 1 personnes du groupe AB.
On prélève au hasard 3 flacons parmi les 18 flacons obtenus.
Calculer la probabilité des événements suivants :
1) Les sangs des trois flacons appartiennent au même groupe.
2) Parmi les trois flacons, il y a au moins 1 flacon du groupe A.
3) Les sangs des 3 flacons appartiennent à 3 groupes différents.

Exercice 9 :Cinq personnes se donnent rendez -vous dans un des cinq cafés d'un village.
Chaque personne choisit au hasard l'un des cinq cafés .Calculer la probabilité de chacun des événements :
A : «chacune des cinq personne se trouve seul ». B : « les cinq personne se retrouvent dans le même salle ».
C : « aux moins deux personnes se trouvent dans le même café ».

Exercice10 :On jette deux fois de suite un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 ; on forme ainsi un couple (α,β). Soient A et B deux points du plan et G le barycentre des points pondérées $(A,\alpha),(B,\beta)$. Quelle est la probabilité des événements suivants :

1) $G=A*B$. 2) G est le point tel que : $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

3) L'ensemble des points M tel que $\left\|\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}\right\|=9$ soit un cercle de centre G et de rayon 1.

Exercice 11 :Une urne contient 3 jetons blancs (un rectangle et deux triangles) et 4 jetons noirs (3 rectangle et un triangle).On tire au hasard et simultanément 3 jetons de l'urne On suppose l'équiprobabilité des tirages
Soit A l'événement : « Avoir trois jetons de la même façon »
et B l'événement : « Avoir trois jetons de la même couleur»
1) Calculer $p(A)$;$p(B)$ et $p(A\cap B)$
2) les événements A et B sont il indépendants

Exercice 12 : On jette deux dés équilibrés l'un blanc dont les faces numérotées 1 ;1 ;2 ;2 ; 5 et 6, le deuxième est noir dont les faces sont numérotées 1 ;2 ;3 ;4 ;4 ; et 5. On note les numéros des deux faces supérieures après le lancer. Déterminer la probabilité des chacun des évènements suivants :
A :"Avoir deux numéros identiques", B :"Deux numéros successifs"
et C :"Une seul fois le numéro 1 ou deux numéros successifs"

Exercice 13 : Une urne contient : $\begin{cases} \text{quatre jetons blancs numérotés: -2 ; -1; 0 et 1} \\ \text{trois jetons noirs numérotés: 0; 1 et 1} \\ \text{cinq jetons verts numérotés : -1; -1; 0; 1 et 1.} \end{cases}$

1) On tire simultanément et au hasard 4 jetons de l'urne. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants : A : « le tirage comporte trois couleurs »
B : « Le produit des numéros des 4 jetons tirés est strictement positif »
C : « Il reste deux couleurs dans l'urne »
D : « avoir un seul jeton noir et exactement 2 jetons portant le numéro 1 ».
2) On tire successivement et sans remise 3 jetons de l'urne.
a- Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants.
E : « avoir 3 jetons de couleurs différents »
F : « La somme des numéros des trois jetons tirés est égale à 2 »
b- En déduire la probabilité des évènements : $E \cup F$ et E' : « avoir au plus deux couleurs ».

Exercice 14 : Une urne contient deux boules rouges et n boules noires avec n un entier naturel supérieur à 2. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.
1) On tire simultanément deux boules de l'urne
a) Déterminer la probabilité de l'événement suivant :
A : « Avoir 2 boules rouges » B : « Avoir 2 boules de mêmes couleurs »
b) Déterminer n pour que $p(A) = \frac{1}{15}$
2) Pour la suite de l'exercice on prend $n = 4$
Les deux boules rouges sont numérotées : 1,2.et Les 4 boules noires sont numérotées : 0, 1, 1,2.
On tire successivement et sans remise deux boules de l'urne
a) Déterminer la probabilité d'avoir deux boules de même parité.
c) Déterminer la probabilité d'avoir au moins une boule qui porte le numéros 1.

Exercice 15 : On considère une pièce de monnaie truquée telle que la probabilité d'avoir pile est le double de celle d'avoir face.
1) On lance la pièce une seule fois. Calculer la probabilité d'avoir pile et celle d'avoir face.
2) On lance la pièce quatre fois de suite.Calculer la probabilité d'avoir :
a) Quatre fois pile . b) Au moins trois fois pile
c) Pour la première fois pile au troisième lancer.

Exercice 16 : Dans un examen, on pose à un candidat dix questions auxquelles, il doit répondre par vrai ou faux. Le candidat ignorant les réponses répond au hasard.
1) Quelle probabilité a-t-il de répondre juste au 10 questions ?
2) Quelle probabilité a-t-il de répondre juste à 9 questions ?
3) Il est reçu s'il répond juste à au moins 8 questions. Quelle probabilité a-t-il d'être reçu ?

Exercice 17 : Pour se rendre à son travail, un automobiliste traverse successivement quatre carrefour munis de feux de signalisation, chaque feu peut être rouge(R), orange (O) ou vert (V). On appelle

"trajet" de 'automobiliste un quadruplet de lettres choisies parmi R, O et V. (exemple(R, R, V et T)
1)Déterminer le cardinal de l'univers des trajets possibles.On se place l'hypothèse de l'équiprobabilité.
2)Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
A:« les deux premiers feux du trajet sont rouges » , B:« les quatre feux sont de même couleur »
C:«Une couleur et une seule est répétée deux fois dans le trajet»
3)L'automobiliste s'arrête si un feu est rouge ou orange Calculer la probabilité de chacun des événements suivants : D:« Au moins un arrêt dans le trajet »
E:« Exactement deux arrêts dans le trajet » ,F:« Un arrêt et un feu sont allumés dans le trajet »

Exercice 18 **:**Un sondage réalise a la sortie d'un supermarché auprès de 350 femmes, a donnée les résultats suivants : 86%d'entre elles sont des femmes au foyer, les autres sont salariées ;
66%d'entre elles sont dépense entre 40 et 100 DT ;
Parmi les femmes salariées, les $\frac{4}{7}$ ont dépensé entre 40 et 100DT, et deux ont dépensé plus de 100DT ;
Aucune femme au foyer n'a dépense plus de 200DT.

1) Recopier et compléter le tableau suivant :

Catégorie / Dépense	Au foyer	Salariée	Totale
Moins de 40DT			
Entre 40 et 100DT			
Plus que 100DT			
Total			

2) On choisit au hasard une de ces femmes interrogées .Calculer la probabilité des événements suivants :
a) La femme choisit est au foyer.
b) La femme choisit dépense moins de 40DT.
c) La femme choisit est au foyer ou dépense moins de 40DT.
3) Calculer la probabilité des événements suivants :les trois femmes choisies sont de même catégorie.
b) les trois femmes choisies dépense le même montant.
les trois femmes choisies sont de même catégorie et dépense le même montant.
d) Une seule femme est salariée.

Exercice 19 **:**I) Au cours d'un examen un élève doit tirer simultanément et au hasard trois question parmi 10 questions reportées de la manière suivante :
* 5 questions d'analyse
* 3 questions de géométrie
* 2 questions de probabilités

1) Calculer la probabilité des événements suivants :A : « L'élève tire trois questions de la même matière»
B : « L'élève tire trois questions de trois matière différentes»
C : « L'élève tire trois questions de deux matière différentes»
D : « L'élève tire au moins une question de probabilité»
2) Calculer $p(C \cap D)$ et $p(C \cup D)$
II) On suppose que l'élève doit tirer l'un après l'autre trois questions différentes parmi les 10 questions
1) Calculer la probabilité des événements suivants :H : « Avoir deux questions de probabilité»
F : « Avoir au plus une question de probabilité »

2) Soit l'événement G : « Avoir une seule question de géométrie» montrer que $p(G)=\frac{21}{40}$

Exercice 20 :Une urne contient 11 boules : cinq boules rouges numérotée 1, 1, -1, -1,2
Trois boules blanches numérotée 1, -1,-1, 2 et Deux boules jaunes numérotée 1, 2
On tire simultanément trois boules de l'urne. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
A:« Obtenir trois boules de même couleur »
B : « Les trois boules tirées contiennent exactement deux boules noires»
C : « Obtenir au moins deux boules rouges»
D : « La somme des numéros obtenue est égal à 3»
2) On tire successivement et sans remise 4 boules de l'urne .Calculer la probabilité de chacun des événements suivants : A_1:« Obtenir exactement une boule blanche »
B1 : « Avoir deux boules rouges et deux boules blanches» , C1 : « Avoir un produit des numéros positifs»

Exercice 21 :Une urne contient dix boules dont quatre portent le numéro (1), quatre portent le numéro (2) et deux portent le numéro (3). On tire au hasard successivement et sans remise deux boules de l'urne.
1) Quelle est la probabilité de tirer deux boules de même numéro ?
2) Après l'épreuve, on forme l'équation $(E): ax^2-6x+c=0$ où :

$$\begin{cases} a \text{ est le numéro de la première boule tirés} \\ c \text{ est le numéro de la deuxième boule tirée} \end{cases}$$

Quelle est la probabilité des événements suivants :A : « l'équation (E) admet une racine double »
B : « l'équation (E) admet deux racines distinctes »
C : « l'ensemble des solutions de l'équation (E) est $\left\{\frac{3-\sqrt{5}}{2};\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$»

Exercice 22 :On lance un dé cubique pipé (il n'y a pas un équiprobabilité d'apparition de chaque face) dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On désigne par p_n la probabilité d'obtenir le nombre n et on donne $p_1=\frac{1}{15}$, les nombres p_n forment un suite vérifiant $p_{n+1}-p_n=r\ (r\in\mathbb{R})$
1) Exprimer p_2, p_3 puis p_n en fonction de p_1 et r
2) Calculer en fonction de p_1 et r la somme S de toutes les probabilités $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$. En déduire la valeur de r et des nombres p_2, p_3, p_4, p_5, p_6
3) Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre premier (on appelle qu'un nombre premier est un entier différent de 1 divisible par 1et par lui-même seulement)
4) Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair.

Exercice 23 : Un urne U_1 contient 7 boules indiscernables au toucher, réparties comme suit : 4 blanches numérotées : 0 ; 0 ; -1 ; 2 et 3 rouges numérotées : 1 ; 1 ; -1.
1) On tire simultanément et au hasard 3 boules de l'urne U_1.
a) Quelle est la probabilité de chacun des évènements suivants : A :"Obtenir une seule boule blanche" et B :"Obtenir exactement deux boules portants un numéro supérieur ou égale à 0".
b)Calculer : $p(A\cup B)$.
2) On tire successivement et sans remise 4 boules de l'urne U_1. Quelles est la probabilité de chacun des

évènements suivants : S :"Obtenir quatre boules portant des numéros dont la somme est nulle" et C :"Obtenir une boule blanche au 3ème tirage et une boule rouge au 4ème tirage".

3) Une urne U_2 contient 5 boules numérotées : 0, 0, 0, 1, 1. On tire au hasard une boule de l'urne U_1 puis une boule de U_2. On désigne par a le numéro inscrit sur la boule tirée de U_1 et par b celui de la boule tirée de U_2. On considère P le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $R = (O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit M un point du plan d'affixe $Z = a + ib$. Calculer la probabilité des chacun des évènements suivants : G :"M est un point de la droite $(O, \vec{u})$ distinct de O" et H : "M est un point du cercle ζ de centre O et de rayon $\sqrt{2}$ ".

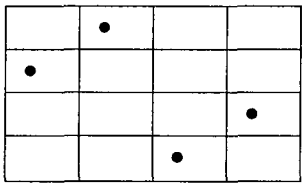
Exercice 24 : Un damier carré comporte 16 cases. On place 4 jetons identiques sur les cases du damier. (Un jeton par case au maximum).Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « Les quatre jetons sont sur les deux premières lignes sachant qu'aucune de ses cases n'est vide »

B : « Les quatre jetons sont alignés »

C : « Au moins un jeton sur la première ligne » ,

D : « Exactement un jeton par ligne et par colonne »



Exercice25 : Un sac contient :

$\begin{cases} \text{deux jetons rouges numérotés 1,2} \\ \text{Quatre jetons noires numérotés 1, 2, 3,4} \\ \text{Six jetons verts numérotés 1, 2, 3, 4, 5,6} \end{cases}$

On suppose que chacune des épreuves suivantes, les événements élémentaires sont équiprobable.

1) On tire simultanément trois jetons du sac. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A_1 : « Obtenir un tirage unicolore » , B_1 : « Obtenir un tirage bicolore »

C_1 : « Obtenir un tirage unicolore ou formé de jetons portant des numéros pairs »

2) On tire successivement et sans remise six jetons du sac. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants : A_2 : « Obtenir consécutivement et dans cette ordre 5, 6 »

B_2 : « Le premier jetons tiré porte un numéro pair et le dernier est vert »

3) On tire successivement et avec remise six jetons du sac. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants : A_3 : « Obtenir deux jetons noirs et quatre jetons verts »

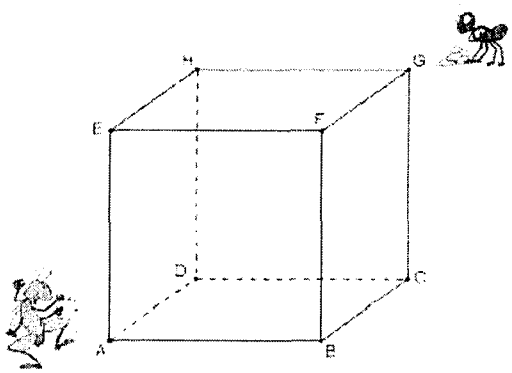
B_3 : « Obtenir exactement deux couleurs de façon alterné (exemple (R, N, R, N, R, N)) »

Exercice 26 : Une loterie comporte cent billets parmi les quels un billet gagne un lots de 100 dinars. Cinq billets gagne chacun un lot de 30 dinars et 10 billets gagne chacun un lot de 10 dinars.

1) Quelle est la probabilité pour qu'un acheteur de trois billets gagne exactement 30 dinars.

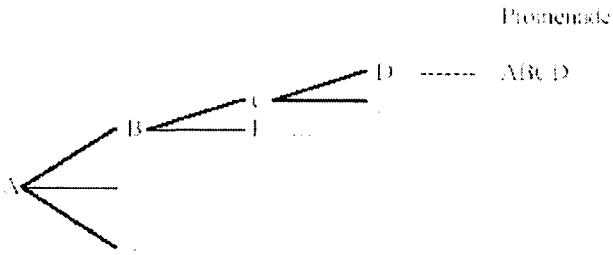
2) Quelle est la probabilité pour qu'un acheteur de trois billets gagne au moins 20 dinars.

Exercice 27 La Cigale, chantant tout l'été, part tous les matins du sommet A d'un cube (où elle habite) et se déplace d'un sommet à l'autre, en empruntant à chaque sommet, une autre arête au hasard .Pour varier ses inspirations musicales, la Cigale ne repasse jamais par une arête déjà empruntée (même dans le sens inverse), mais peut repasser par un •, sommet déjà emprunté.



Partie I) Une courte promenade d'été On étudie le cheminement de la Cigale sur 4 sommets consécutifs. Une promenade est codée par la donnée dans l'ordre des sommets atteints : ABCD, ADCG,

1) Déterminer toutes les promenades possibles de la Cigale (on pourra s'aider d'un arbre).



2)a) Quelle est la probabilité qu'elle finisse sa promenade chez elle en A?

b) Quelle est la probabilité qu'elle finisse sa promenade chez sa voisine la Fourmi en G?

Partie II « La Cigale, ayant chanté tout l'été, se trouva fort dépourvu quand la bise fut venue Pas un seul petit morceau de mouche ou de vermisseau. Elle alla crier famine chez la fourmi sa voisine (en G), la priant de lui prêter quelque grain pour subsister jusqu'à la saison nouvelle ... »

La Cigale (qui part de A) n'a pas le sens de l'orientation et se déplace toujours au hasard sur les arêtes du cube comme en été, sans emprunter un chemin par lequel elle est déjà passée. Elle continue ainsi son chemin jusqu'à ce qu'elle arrive chez la Fourmi ou qu'elle se trouve bloquée

1) Lors de son excursion sur le cube, la Cigale peut-elle passer trois fois par un même sommet?

2)Dans la suite de l'exercice, on suppose que la Cigale commence par se rendre en B. Déterminer alors tous les chemins possibles de la Cigale.

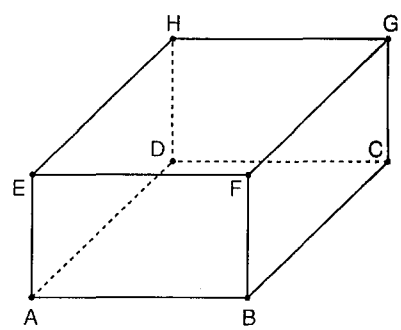
3)La Cigale a-t-elle plus de chance de se retrouver bloquée sans pouvoir avancer ou de trouver la maison de la Fourmi en G?

4)La bise soufflant, il faut une heure à la Cigale pour parcourir une arête d'un sommet à l'autre. Elle est donc arrivée en B en 1 heure. Quelle est la probabilité qu'elle arrive chez sa voisine

a)en 4 heures exactement? b) en 5 heures exactement?

c)en 6 heures ou plus? d)sans repasser par un sommet déjà emprunté?

Exercice 28 : Une mouche mâle (nommée Flipeur) se déplace sur les murs d'une pièce représentée par le pavé de la figure ci-dessus (où AB 7 m, AD 9 m et AE 4 m). Flipeur se trouve (symboliquement) au point A quand il voit atterrir au point G la délicieuse et irrésistible mouche Flipette. Il décide sans ambages de la rejoindre.



Dans un premier temps notre Flipeur décide de jouer les mouches équilibristes et se déplace uniquement sur les aretes de la pièce.

a) Nous supposons la condition MI (Mouche Intelligente) suivante vérifiée(MI) « La mouche ne repasse jamais deux fois par le même sommet » Quel est alors le nombre total de chemins possibles permettant d'arriver au point G?

b)Parmi les chemins précédents, indiquer les chemins les plus courts.

c)Déterminer la probabilité pour que Flipeur choisisse du premier coup un des chemins les plus courts.

Exercice 29

Les Désirus Algébricus sont des mammifères très rares que l'on trouve uniquement sur une petite de de l'Atlantique Enezus Sunus.En ce qui concerne cette espèce, les Désirus algébricus sont fidèles en couple et les naissances se déroulent de la façon suivante

• Après la naissance d'un mâle, la femelle meurt.
• Si elle n'est pas morte à la suite de la naissance d'un mâle, la femelle meurt après la quatrième naissance.
De plus:• Une femelle Désirus Algébricus a autant de chances de donner naissance à un mâle qu'à une femelle.
• Une femelle Désirus Algébricus n'est jamais stérile mais ne donne naissance qu'à un seul petit à la fois (il n'y a pas de jumeaux, triplés. .
• Lorsque la femelle disparaît, le mâle se laisse dépérir et meurt peu après.
Un comptage de ces mammifères en janvier 2010 a dénombré autant de mâles que de femelles.
Pensez-vous que ces particularités quant à la reproduction chez les Désirus Algébricus vont amener à une population qui va être constituée majoritairement de mâles? de femelles? ou bien à part égale de mâles et de femelles?

Exercice 30

On lance trois fois de suite un dé non truqué dont les six faces sont numérotées 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 et 6. Une issue de cette expérience aléatoire est donc un triplet (a, b, c) où a est le résultat obtenu au premier lancer, b le résultat obtenu au second lancer et c le résultat obtenu au troisième lancer.

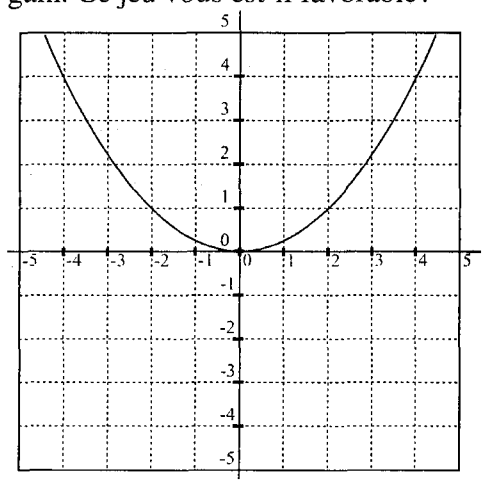
1. Déterminer le nombre d'issues possibles pour cette expérience aléatoire.
2. Si le résultat des trois lancers est le triplet (a, b, c), on considère l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, d'inconnue x.
   Par exemple, si le résultat des trois lancers est (3, 5, 3), on considère l'équation $3x^2 + 5x + 3 = 0$.
   a) 0 peut-il être une solution d'une équation $ax^2 + bx + c = 0$?
   b) Justifier que quelque soit le triplet (a, b, c), l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet aucun nombre réel positif ou nul pour solution.
   c) Existe-t-il un triplet (a, b, c) pour lequel le nombre -1 soit une solution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$? Si oui donner un tel triplet (a, b, c)
   Quelle est la probabilité de l'événement « - 1 est solution de l'équation obtenue après le lancer des trois dés » ?
3. On souhaite construire maintenant avec le triplet (a, b, c) obtenu le triangle (éventuellement aplati) dont les trois côtés ont pour mesures respectives a ,b et c.(le triplet (b, c, a) donne un autre triangle.)
   a) Parmi les résultats suivants, indiquer dans chaque cas si une telle construction est possible :
      1) (3, 5, 3)
      2) (2, 5, 2)
      3) (4, 2, 6)
      4) (6, 3, 5)
      5) (6, 1, 4)

   On admet qu'il y a 156 triplets (a, b, c) permettant de réaliser la construction d'un triangle, et on suppose par la suite cette condition réalisée.

   b) Quelle est la probabilité que le triangle construit soit équilatéral ?
   c) Quelle est la probabilité que le triangle construit soit rectangle ?
   d) Pierre pense qu'il est plus probable que le triangle obtenu soit isocèle plutôt que non isocèle. A-t-il raison ?

Exercice 31 Dans ce jeu. qui se joue à deux, les joueurs choisissent à tour de rôle un dé à six faces parmi les trois dés proposés ci—dessous puis les lancent en même temps. Le gagnant est celui des deux joueurs qui obtient le résultat le plus élevé.
Dé Rouge : six faces numérotées 4 - 4 - 4 - 4 - 4 - 4

Dé Bleu six faces numérotées 2 - 2 - 2 - 2 - 8 - 8
Dé Vert six faces numérotées 0 - 0 - 6 - 6 - 6 - 6
Ces trois dés sont supposés équilibrés. Le maître du jeu dit que la numérotation des faces a été faite de façon à ce que le jeu soit équitable puisque la moyenne des chiffres inscrits sur les faces est la même quelque soit le dé choisi. Il prétend même vous avantager en vous demandant de faire votre choix en premier.
1)Quelle est la probabilité que le résultat obtenu avec le dé Bleu soit supérieur à celui obtenu avec le dé Rouge?
2)Quelle est la probabilité que le résultat obtenu avec le dé Bleu soit supérieur à celui obtenu avec le (lé Vert?
3)Le maître du jeu vous demande de choisir un dé puis choisit le sien.
a)Montrer que quelque soit votre choix, il a plus de chance de gagner que Vous.
b)La participation au jeu coûte 1 D et vous recevez 2,50 D en cas de gain. Ce jeu vous est-il favorable?
4)Le jeu est modifié de la façon suivante: le dé vert vous est attribué, et le maître du jeu tire au hasard l'un des deux dés restants. Qui a maintenant le plus de chances de gagner?

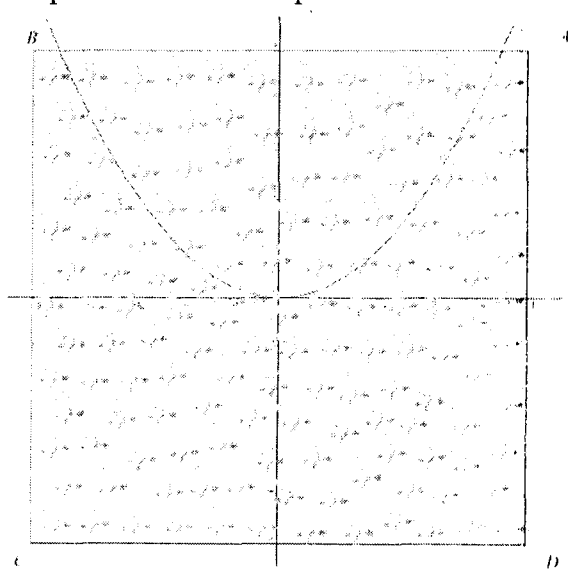


Exercice 32 On a tracé ci-dessous la courbe représentative, dans un repère orthonormal d'unité 1cm, de la fonction définie par $f(x)=\frac{1}{4}x^2$, pour tout x réel. La lecture d'informations sur ce graphique pourra être utile dans la suite de ce problème.

Soit (E)l'équation $x^2+bx+c=0$.

1)Montrer que l'équation (E) admet deux solutions distinctes si, et seulement si, $c \leq \frac{1}{4}b^2$.

Décrire, dans ce cas, la position du point M de coordonnées (b; c) par rapport à la courbe de la fonction f tracée dans le repère ci-dessus.
2)Dans une urne contenant 11 boules indiscernables au toucher, numérotées de -5 à 5, on tire au hasard une boule dont on note le numéro que l'on remet dans l'urne puis on tire une seconde boule dont on note également le numéro. h prend comme valeur le numéro porté par la première boule et r prend comme valeur celle de la deuxième boule de façon à constituer les coefficients de l'équation (E). Soit A l'événement « l'équation (E) possède deux solutions distinctes » et B « l'équation (E) possède une unique solution ». Déterminer, à l'aide du graphique ci-dessus, P(A) et P(B).



3) On suppose désormais que les coefficients b et c de l'équation (E) sont obtenus aléatoirement dans l'intervalle $[-5,5]$. a)Encadrer l'aire du domaine colorié sur le repère ci-dessus entre deux entiers.
On considèrera dans la suite comme valeur approchée de cette aire la moyenne de ces deux entiers.
b)Evaluer P(A) et P(B) dans le cadre de cette expérience.
c) Un jardinier a décoré de fleurs un terrain de forme carrée (comme ABCD ci-dessous contenant une partie parabolique correspondant à la partie colorée. Il a planté des centaines de fleurs uniformément sur ce terrain carré. Donner un moyen au

jardinier de retrouver l'aire de la surface colorée.

Exercice 33 : Un minibus scolaire se charge d'amener les élèves et leurs enseignants. Au chemin le minibus contient 3 enseignants et 9 élèves (2 garçons et 7 filles).

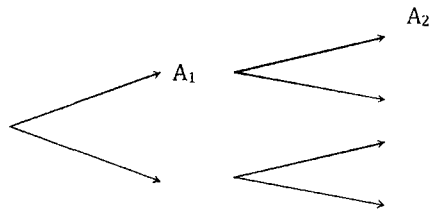
1) À la 1ère station 3 personnes vont descendre. Quelle est la probabilité de chacun des évènements suivants :A:«Parmi les trois il y a exactement un enseignant » ,

B :« Parmi les trois il y a au moins une fille »

C : « Parmi les trois il y a exactement un enseignant et au moins une fille » , D : « $A \cup B$ ».

2) Le bus rencontre de nombreux feux tricolores. Pour tout entier $n \geq 1$, on note :

A_n : « Le bus est arrêtée par le $n^{ième}$ feu rouge ou orange » (l'orange est considéré comme rouge), P_n est la probabilité de A_n , $\overline{A}_n$: L'évènement contraire. La probabilité que le feu soit rouge ou orange est $\frac{1}{8}$. Pour les feux suivants, on suppose que les conditions suivantes sont réalisées. Si le feu est rouge ou orange alors la probabilité que le suivant soit rouge ou orange est $\frac{1}{20}$. Si le veut est vert alors la probabilité que le suivant soit rouge ou orange est $\frac{9}{20}$ .a)Compléter l'arbre suivant pour n = 2 :



b)Déterminer $P(A_n \cap A_{n+1})$ et $P(\overline{A}_n \cap A_{n+1})$ en fonction de P_n.

c)Déduire que $P_{n+1} = \frac{9}{20} - \frac{2}{5}P_n$

3) Soit la suite (U_n) définie par : $U_n = 28\,P_n - 9$. a)Montrer que (U_n) est une suite géométrique de raison $q = -\frac{2}{5}$

b)Exprimer U_n et P_n en fonction de n. c)Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n$

Exercice 34:1)Dans une classe de troisième science de 25 élèves comprenant 11 filles et 14 garçons, on veut former une équipe de basket constituée de 5 joueurs les choix de joueurs sont équiprobables.

Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

A : « L'équipe obtenue est formé par de 5 joueurs de même sexe »

B : « L'équipe obtenue est comprend au moins deux filles»

C : «L'équipe obtenue comprend au moins une fille ou exactement deux garçons«

2) Un élève E de cette classe effectue au maximum 5 essaie successifs pour marquer un panier, il s'arrêt dés qu'il marque le panier. La probabilité de réussir le premier essai est $p_1 = \frac{1}{2}$. S'il rate un essai, la probabilité de réussir le suivant est $\frac{2}{5}$ .Pour $k \in \{1,2,3,4,5\}$; On désigne par p_k l'évènement «Réussir le panier au k^{ieme} essai »et on note p_k sa probabilité}.

a) Monter que $p_2 = \frac{1}{5}$. b) Calculer p_k pour k de {3, 4, 5}.

c) En déduire la probabilité pour que l'élève E n'arrive pas à marquer le panier après les 5 essais.

Devoir de contrôle N°2

Exercice n°1 : La figure ci contre est la représentation d'une fonction f.

1) A l'aide du graphique déterminer $f'(-2)$ et $f'(-1)$.

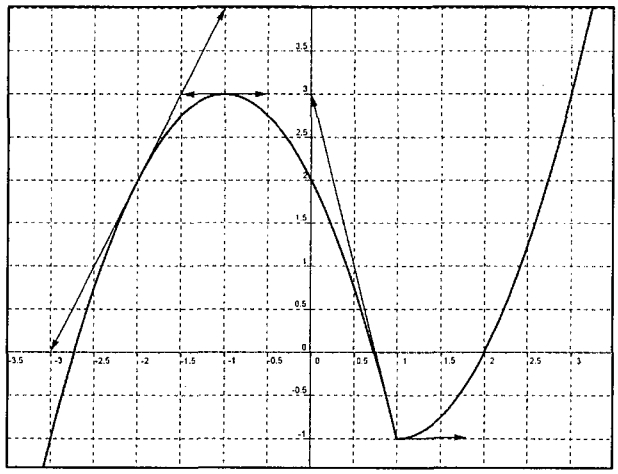
2) Cocher la où les bonnes réponses :

a) f est dérivable :

i) à droite en 1 ii) à gauche en 1 ii)en 1.

b) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{f(x)+1}{x-1} =$ i) -4 ii) -1 iii) 1 iv)4.

c) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x)+1}{x-1} =$ i)$-\infty$ ii)$+\infty$ iii) 0 iv)1.



3)Soit $g(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels.

a)Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $g'(x)$

b) Déterminer les réels a, b et c pour que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

$$\begin{cases} \bullet \text{La droite : } y = 2x + 1 \text{ est la tangente à } \zeta_g \text{ au point d'abscisse } 0. \\ \bullet \text{Les tangentes } \zeta_f \text{ et } \zeta_g \text{ en leurs points d'abscisses } -1 \text{ sont parallèles.} \end{cases}$$

4) Soit $\begin{cases} h(x) = \sqrt{x^2 + x}, \text{si } x \geq 0 \\ h(x) = \dfrac{x}{x-1}, \quad \text{si } x < 0 \end{cases}$ a) Montrer que h est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Etudier la dérivabilité de h en 0. Interpréter graphiquement le résultat.

c) Montrer que h est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ et calculer $h'(x)$.

Exercice n° 2 :

1) Soit $f(x) = 4\cos^2(x) - 3$.

a- Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0, \pi]$: f(x) = 0.

b- Déterminer le signe de f(x) sur $[0, \pi]$.

2) Soit $g(x) = f(x) - \sqrt{3}\sin(2x) + 2\sin^2(x)$.

a- Montrer que : $g(x) = 2\sin\left(2x + \dfrac{5\pi}{6}\right)$

b- Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0, \pi]$: $\dfrac{g(x)-1}{f(x)} \leq 0$.

3) a- Montrer que $\cos(3x) = \cos(x).f(x)$.

b- En déduire la valeur de $A = 4\cos^3\left(\dfrac{\pi}{9}\right) - 3\cos\left(\dfrac{\pi}{9}\right)$.

Exercice N°3: Soit f une fonction définie sur $IR\setminus\{3\}$ par $f(x)=\dfrac{5-x^2}{x-3}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to3^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to3^+} f(x)$

2) a) Montrer que $\forall x\in IR\setminus\{3\}$, on a $f'(x)=\dfrac{-x^2+6x-5}{(x-3)^2}$.

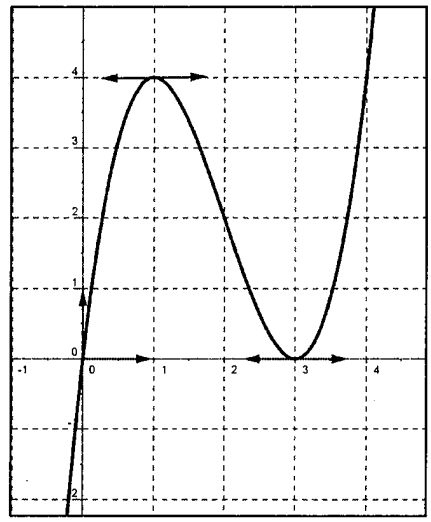
b) Dresser le tableau de variation de f ; c) Déterminer les extremums de f

3) a) Ecrire l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

b) Déterminer les points de (C) où la tangente (T) est parallèle à la droite $\Delta: 5x+9y=0$

Devoir de synthèse n2 :

Exercice n°1 : La figure ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. La courbe ζ_f admet deux branches paraboliques de direction $(O,\vec{i})$, l'une au voisinage de $+\infty$ et l'autre au voisinage de $-\infty$.



1) À partir graphe dresser le tableau de variation complète de f.

2) Déterminer : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3) Soit $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$. a/ Préciser l'ensemble de définition D de g.

b/ Montrer que g est dérivable sur D et exprimer sa fonction dérivée en fonction de f' et f

c/ Dresser le tableau de variation de g.

Exercice2 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+2}{x-2}$; $a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}$

1)a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ et que $f'(x)=\dfrac{ax^2-4ax-2b-2}{(x-2)^2}$

b) Déterminer les réels a et b pour que f admet un extremum en 4 sa valeur est 7.

On suppose dans la suite que $a=1$ et $b=-1$

2)a) Dresser le tableau de variation de f. b) Préciser la nature des extremums de f.

3) le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. On note ζ_f la courbe représentative de la fonction f.

Déterminer les équations des tangentes à ζ_f parallèle à la droite $D: 3x+y-5=0$

4) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x+2}{x-2} & \text{si } x\in[4,+\infty[\\ \sqrt{4-x}+2x-1 & \text{si } x\in]-\infty,4[\end{cases}$

On note ζ_g la courbe représentative de la fonction g.

a) Montrer que g est continue en 4 . b) Etudier la dérivabilité de g à droite et à gauche en 4

c) Répondre par **V**rai ou **F**aux en justifiant la réponse i) g est dérivable en 4

ii) ζ_g admet une demi tangente horizontale à droite en 4.

iii) ζ_g admet une demi tangente verticale dirigée vers le bas à gauche en 4.

Exercice3 : Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(o,\vec{u},\vec{v})$ on donne les points A,B et C tels que : $Z_A=2$; $Z_B=1+i\sqrt{3}$ et $Z_C=1-i\sqrt{3}$.

I. 1) Donner la forme trigonométrique de Z_B *et* Z_C. 2) Calculer Z_B^{2008} sous forme algébrique .

3) Déterminer la nature du quadrilatère OBAC. 4) Placer les points A, B et C.

5) Déterminer et construire l'ensemble suivant : $\zeta=\{M(Z)\in Ptelque : |z-2|=|z|\}$

II- Z tout point M du plan d'affixe $Z \neq Z_A$ on associe e point M' d'affixe $Z' = \frac{-4}{Z-2}$

1) a)Montrer que : $Z = Z' \Leftrightarrow (Z-1)^2 + 3 = 0$. b) Résoudre dans $\mathbb{C}$: $(Z-1)^2 + 3 = 0$.

c) En déduire les points associe à B et C.

2) a)Montrer que $|Z'-2| = \frac{2|Z|}{|Z-2|}$.

b) On suppose que M$\in \zeta$. Montrer que M' appartient à un cercle δ dont on précisera le centre et le rayon

c) Soit D le point d'affixe $Z_D = \frac{Z_B^2}{Z_C}$ sans calculer Z_D montrer que les points B, C et D appartiennent à un même cercle de centre O .

d) Montrer que BC=CD, construire D

Exercice N° 4 : Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = 2x^3 - 6x + 4$. On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Dresser le tableau de variation de f

2) Montrer que le point $I(0;4)$ est un centre de symétrie pour la courbe (C_f).

3) Ecrire l'équation de la tangente T à (C_f) au point I.

4) Etudier la position relative de T et (C_f) ; 5) Construire T et (C_f)

6) Déterminer suivant le paramètre m le nombre de solutions de l'équation : $x^2 - 3 = \frac{m-4}{2x}$

7) Soit α et β deux réels de l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ avec $\alpha < \beta$, comparer : $f(\cos\alpha)$ et $f(\cos\beta)$

8) Soit g la fonction définie sur IR par $g(x) = |2x+4|(x-1)^2$

a) Construire (C_g) à partie de (C_f) ; b) Dresser le tableau de variation de g

Devoir de contrôle n°3

Exercice 1 : **A)** un sac contient : cinq boules rouges numérotée 0, 0, 1, 2,2
Trois boules blanches numérotée 0, 1, 2
Deux boules jaunes numérotée 0, 4

On tire simultanément trois boules de sac. Dénombrer les tirages dans chacun des cas suivants :

a) Obtenir trois boules de même couleur

b) Obtenir une seule boule jaune

c) La somme des trois numéros inscrits sur les boules tirées est égale à 5

d) Le produit des trois numéros obtenus est nul

B) 1)a) Vérifier que pour tout entier naturel k on a : $k(k!) = (k+1)! - k!$

b) En déduire que pour tout entier naturel non nul n on a : $1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + ... + n(n!) = (n+1)! - 1$

2) Résoudre dans $\mathbb{N}$: $\dfrac{1 + 1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + ... + n(n!)}{(n-1)!} = 12$

Exercice 2 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}/\{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x+1}$

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) On suppose que pour tout x de $\mathbb{R}/\{-1\}$ on a : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$

a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. En déduire la valeur de a

b) Calculer $\lim\limits_{x \to (-1)} (x+1) f(x)$. En déduire la valeur de c

c) Calculer $f(0)$. En déduire la valeur de b

2)a) Montrer que la droite Δ d'équation $y = x - 3$ est une asymptote oblique de (C_f)

b) Etudier la position de (C_f) par rapport à Δ

3) Dresser le tableau de variation de f

4) Tracer (C_f) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

5) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}/\{-1\}$ par : $h(x) = \dfrac{f(x) - |f(x)|}{2}$

Tracer à partir de (C_f) et dans le même repère, la courbe de h

Exercice 3 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin(2x)$

C_f désigne sa courbe représentative dans un repère orthogonale du plan.

1) Montrer que f est périodique et donner sa période

2)a) Dresser le tableau de variation de f sur $[0, \pi]$

b) Déterminer les coordonnées des points d'intersections de C_f avec les axes de coordonnées dans $[0, \pi]$.

c) tracer C_f sur $[0, \pi]$ puis sur $[-\pi, 2\pi]$

3) Utiliser la courbe obtenue, pour donner selon la valeur du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ dans $[0, 2\pi]$.

4) Calculer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x+\frac{2\pi}{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\tan x}$ et $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{12}}\dfrac{2f(x)+1}{x+\frac{\pi}{12}}$

Exercice 4 :

A) Cocher la réponse exacte :

		A	B	C
1	On considère la fonction définie sue $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{4}x-4\right)$. Alors f est périodique et de période :	$\frac{\pi}{4}$	-4	8
2	Une urne contient 5 boules numérotées 1, 2, 3, 4 et 5. on tire successivement avec remise trois boules de l'urne. Le nombre de tirages possibles est :	60	10	125
3	La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n=\cos n$	Est majorée	N'est pas bornée	Est positive
4	La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n=-2\left(\frac{5}{6}\right)^n$	Est croissante	Est décroissante	N'est ni croissante, ni décroissante.
5	On lance simultanément deux pièces identiques non truqués. La probabilité d'obtenir pile ou face est égale à :	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

B) répondre par **Vrai** ou **Faux :**

I) Soit f une fonction définie sur un ensemble D et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Si $f(2a-x)=2b-f(x)$ alors le point $I(a,b)$ est un centre de symétrie de (C)

2) Si f est une fonction paire alors la courbe représentative de la fonction $x\mapsto f(1+x)$ admet un axe de symétrie

3) La représentation graphique de la fonction $x\mapsto f(|x|)$ par une translation de (C)

II)

1) Si une suite n'est pas bornée alors elle n'est pas majorée

2) Si une suite n'est pas décroissante, alors elle est croissante

3) Si une suite est géométrique, alors elle est monotone

4) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x+\cos x$ alors f est croissante sur IR

5) la fonction sinus et cosinus ont le même nombre dérivée en $\frac{3\pi}{4}$

Devoir de synthèse n3 exempele1 :

Exercice n°1 : Dans le tableau ci-dessous, la variable X désigne le nombre de jours après la naissance de nourrisson et la variable Y le poids en kilogrammes :

1) a) Calculer la moyenne $\overline{X}$ et l'écart type σ_X de la variable X.

b)Calculer la moyenne $\overline{Y}$ et l'écart type σ_Y de la variable Y.

2) Représenter, dans un repère orthogonal, le nuage des points associés à la série (X , Y) ainsi le point moyen G.

3) a)Déterminer les coordonnées des points moyens G_1 du nuage des points $M_1(x_1, y_1); M_2(x_2, y_2)$ et $M_3(x_3, y_3)$ Déterminer les coordonnées du point moyen G_2 du nuage M_4, M_5, M_6 et M_7.

b) En déduire une équation de la droite d'ajustement linéaire D de Y en fonction de X.

4) Quelle pourrait la estimation du poids du nourrisson après 30 jours de sa naissance ?

Exercice 2 :Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{-x^2 + 2x + 3}{x - 2}$

1)a) Calculer $f(0)$; $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \mapsto 2} (x-2).f(x)$

b) En déduire les réels a ; b et c tels que : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-2}$; $\forall x \in D$

2) Montrer que le point $I(2,-2)$ est un centre de symétrie pour la courbe C_f

3) Montrer que la droite $\Delta : y = -x$ est une asymptote oblique à la courbe C_f

4) Dresser le tableau de variation de f

5) Tracer la courbe C_f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

6) On pose $g(x) = -|x| + \dfrac{3}{|x| - 2}$

a) Etudier la parité de g . b) Tracer avec une autre couleur la courbe C_g

7) Soit la droite $D_k : y = k$ où $k \in \mathbb{R}$

a) Montrer que pour tout réel k ; la droite D_k coupe C_f en deux points M' et M''

b) Déterminer l'ensemble des points $I = M' * M''$ quand k varie

Exercice 3:Une urne contient : $\begin{cases} \text{quatre jetons blancs numérotés :-2,-1 ;0 et 1} \\ \text{Trois jetons noirs numérotés : 0 ; 1 et1} \\ \text{Cinq verts numérotés : -1;-1;0 ; 1 et1} \end{cases}$

1) On tire simultanément et au hasard **4 jetons** de l'urne

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A « le tirage comporte trois couleurs »

B « les produits des numéros de quatre jetons tirés est strictement positif »

C « ils restent deux couleurs dans l'urne »

D « avoir un seul jeton noir et exactement deux jetons portant le numéros 1 »

2) On tire successivement et sans remise **3 jetons** de l'urne

a) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

E « avoir 3 jetons de couleur différents »

F « la somme des numéros tirés est égale à 2 » et $E \cap F$

b) En déduire la probabilité des événements : $E \cup F$ et E' « avoir au plus deux couleurs »

Exercice n°4: L'espace est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points A(1 ;0 ;1), B(-1 ;-1 ;2) et C(2 ;3 ;-2) et la droite $\Delta : \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 + 2t \\ = -1 + 2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

1) a) Donner un représentation paramétrique de la droite (BC).

b) Les droites Δ et (BC) sont elle coplanaires

2) a) Montrer que les points A, B et C déterminent un plan.

b) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

c) Vérifier que la droiteΔ coupe le plan (ABC) en un point que l'on précisera.

3) a) Vérifier qu'une équation cartésienne du plan P passant par B et contient Δ est P : x – y + z– 2 = 0.

b) Donner un représentation paramétrique de la droite : $\Delta' = P \cap (ABC)$.

EXERCICE5 : Soit (U_n) la suite définie sur IN par $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n + 2}{\sqrt{U_n^2 + 8}} \end{cases}$; $n \in IN$

1) a) Montrer que pour tout $n \in IN$ On a : $0 \leq U_n < 1$

b) Montrer que pour tout $n \in IN$ On a : $U_{n+1} \geq \dfrac{U_n + 2}{3}$ .c) En déduire que (U_n) est croissante .

2) a) Montrer que pour tout $n \in IN$ On a : $1 - U_{n+1} \leq \dfrac{1}{3}(1 - U_n)$

b) En déduire que pour tout $n \in IN$ On a : $1 - U_n \leq \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

3) Soit $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} U_k$.

a) Montrer que pour tout $n \in IN^*$ On a : $S_n \geq n - \dfrac{3}{2}\left(1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right)$ b) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

Devoir de synthèse n3 exempele2 :

Exercice n°1 : L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points A(6,0,0) ; B(0,6,0) ; C(0,0,6) et D(-2,-2,-2).

1) a) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) On note P le plan (ABC). Déterminer une équation cartésienne du plan P.

c) Montrer que les points A, B, C et D sont coplanaires.

2) a) Vérifier que la droite (OD) est perpendiculaire au plan P.

b) Donner une représentation paramétrique de la droite (OD).

c) Soit H le projeté orthogonal de O sur P. Déterminer les coordonnées de H et montrer que H est équidistant des points A, B et C.

d) En déduire que (OD) est l'axe du cercle circonscrit au triangle ABC.

3) Soit Q le plan médiateur du segment [CD]. a) Donner une équation cartésienne de Q.

b) Montrer que P et Q sont sécants et déterminer leur intersection.

Exercice n° 2: Le personnel d'un hôpital est réparti en quatre catégories les médecins, les infirmiers, les techniciens et les cadres administratifs. Le comité de cet hôpital est constitué de douze représentants : Quatre médecins dont 3 femmes et un homme, cinq infirmiers dont 2 femmes et 3 hommes et trois cardes dont 2 femmes et homme.

1) La direction de l'hôpital choisit au hasard trois représentants parmi les douze pour participer à un séminaire à l'étranger. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

A : « les trois représentants choisis sont de même catégories », B : « les trois représentants choisis sont de même sexe », C : « les trois représentants choisis sont de même catégories ou de même sexe »,

D : « parmi les trois représentants choisis, il y a au moins un médecin»

et E : « par les trois représentants choisis, il y a un seul médecin et un seul homme».

2) Lors d'un deuxième séminaire ; un représentant de la catégorie des infirmiers pris au hasard doit quitter le comité et deux femmes techniciennes rejoignent le comité. La direction de l'hôpital choisit au hasard trois représentants parmi ce nouveau comité. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

F : « l'infirmier qui a quitté le comité est un homme et les trois représentants choisis sont des femmes ».

et G : « les trois représentants choisis sont trois femmes ».

Exercice n°3 : Le tableau suivant donne le chiffre d'affaires (en milliers de dinars) du secteur d'emballage d'un pays entre les années 2003 et 2008. (Les résultats trouvés sont à 10^{-2} près).

	Partie (I)			Partie (II)		
Année	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Rang de l'année : X_i	1	2	3	4	5	6
Chiffres d'affaires : Y_i	9	13	16	19	23	3

1) a) Représenter le nuage des points de la série statistique (X,Y) dans un repère convenable choisit.

b) Déterminer les coordonnées du point moyen G de la série statistique (X,Y).

2) Calculer les écart-types de X et Y.

3) On a partagé la série statistique (X,Y)en deux parties (I) et (II).

a) Déterminer les points moyens G_1 et G_2 des deux parties (I) et (II) respectivement.

c) Donner une équation cartésienne de la droite (G_1G_2)

c) En supposant que l'évolution du chiffre d'affaires se poursuivre de la même façon les années suivantes. Donner une estimation du chiffre d'affaires du secteur de l'emballage en 2015.

Exercice n°4 : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$ où a et b deux réels. Le tableau de variation de f sur $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right]$ est donné par :

x	$\frac{\pi}{6}$		$\frac{7\pi}{6}$
$f'(x)$	0	—	0
$f(x)$	2	↘	-2

Soit ζ_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1) a) Déterminer $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$. Montrer alors que : $a = \sqrt{3}$ et $b = 1$.

b) Vérifier que : $f(x) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

c) Calculer $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ puis en déduire les signes de f(x) pour tout $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right]$.

2) a) Montrer que la droite $\Delta : x = \frac{\pi}{6}$ est un axe de symétrie de ζ_f.

b) Montrer que l'étude de f se réduit à l'intervalle $I=\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$.

3) Tracer la partie ζ_0 de ζ_f dans l'intervalle $I=\left[-\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$.

4) Expliquer comment peut-on obtenir la courbe ζ_f à partir de ζ_0.

5) Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\sqrt{3}}{x-\frac{\pi}{3}}$ et $\lim\limits_{x\to\left(\frac{2\pi}{3}\right)^+}\frac{\sin x}{f(x)}$.

<u>Exercice N° 5 :</u>1) Soit (a_n) la suite définie par $a_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k};n\geq 1$.

a) Montrer que pour tout $n\geq 1;\frac{1}{2}\leq\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\leq\frac{n}{n+1}$ .b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$

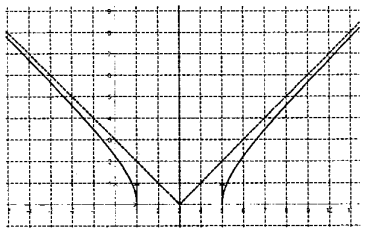
2) a) Montrer que pour tout réel x de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right];\sin x\leq x$

b) En déduire que pour tout réel x de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right];1-\frac{x^2}{2}\leq\cos x$

3) Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right);n\geq 1$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=1$

Exercice n°1 :

x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$				$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0		0	↗	$+\infty$



1)

Exercice n°2 : I)1) a) ,I) 2) a) II) c) III)1) b) III) 2) b)

Exercice N°3 : $f(x)=-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x-1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	0	↘	$-\infty$

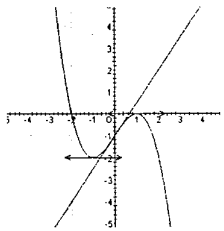
1) f est dérivable sur IR et on a $f'(x)=-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}(x^2-1)$

; $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$ ou $x=-1$

2) $I(0;-1)$; On a si $x\in IR$ alors $2\times 0-x=-x\in IR$;

$f(-x)=-\frac{1}{2}(-x)^3+\frac{3}{2}(-x)-1=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x-1$

$=-2-\left(-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x+1\right)=2\times(-1)-f(x)$ Donc $I(0;-1)$ est un centre de symétrie à (ξ_f).



3) a) $T: y=f'(0)(x-0)+f(0)$; $T: y=\frac{3}{2}x-1$

b) $f(x)-y=-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x-1-\frac{3}{2}x+1=-\frac{1}{2}x^3$

c)

4) a) $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^3+\frac{3}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)-1=\frac{1}{16}-\frac{3}{4}-\frac{16}{16}=-\frac{27}{16}$

b) $\cos^3 x-3\cos x-\frac{11}{8}=0$ signifie que $\cos^3 x-3\cos x+2-\frac{27}{8}=0$ signifie que $-\frac{1}{2}\cos^3 x+\frac{3}{2}\cos x-1=-\frac{27}{16}$

signifie que $f(\cos x)=-\frac{27}{16}$ On a $x\in[-\pi;\pi]\Rightarrow \cos x\in[-1;1]$ et f est strictement croissante sur $[-1;1]$;

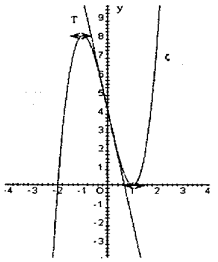
$f(\cos x)=f\left(-\frac{1}{2}\right)$ donc $\cos x=-\frac{1}{2}$ et $x\in[-\pi;\pi]$ Alors $x=\frac{2\pi}{3}$ ou $x=\frac{4\pi}{3}$

Exercice N° 4 : 1) $f(x)=2x^3-6x+4$; f est dérivable sur IR et $\forall x\in IR$ On a : $f'(x)=6x^2-6=6(x^2-1)$;

$f'(x)=0$ signifie que $x=1$ ou $x=-1$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$; $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$; $f(1)=0$ et $f(-1)=8$

2) On a : si $x\in IR$; $2\times 0-x=-x\in IR$; $f(2\times 0-x)=f(-x)=2(-x)^3+6x+4$

$=-2x^3-6x+4+4-4=-(2x^3-6x+4)+8=2\times 4-f(x)$ D'où $I(0;4)$ est un centre de symétrie à ξ_f



3) $T: y=f'(0)x+f(0)=-6x+4$

4) $f(x)=y=2x^3-6x+4+6x-4=2x^3$

5) Voir courbe

6) $x^3-3=\frac{m-4}{2x}$ signifie que $2x^2-6x+4=m$

- Si $m\in]0;8[$; l'équation admet 3 solutions.
- Si $m\in]8;+\infty[$; l'équation admet 1 solution.
- Si $m\in]-\infty;0[$; l'équation admet 1 solution.
- Si $m=8$; l'équation admet 2 solutions.
- Si $m=0$; l'équation admet 2 solutions.

7) β et $\alpha\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$; $\alpha<\beta$ alors $\cos(\alpha)>\cos(\beta)$ car $x\mapsto\cos x$ est décroissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$; $\cos(\alpha)$ et $\cos(\beta)$ sont deux éléments $[0;1]$ et f est décroissante sur $[0;1]$ donc $f(\cos(\alpha))<f(\cos(\beta))$.

8) $g(x)=|2x+4|(x-1)^2$

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	8	↘	0	↗	$+\infty$

a) $g(x)=|f(x)|$; Soit ζ_1 la partie de ζ_f située au dessus de $(O;\vec{i})$ et ζ_2 la partie de ζ_f située au dessous de $(O;\vec{i})$ donc $\zeta_g=\zeta_1\cup S_{(O;\vec{i})}(\zeta_2)$

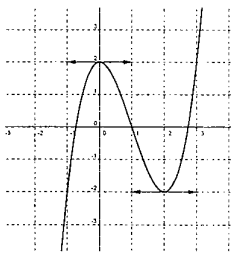
EXERCICE 5: 1) f est une fonction polynôme donc dérivable sur IR ;

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=2$;

$f(0)=2$ et $f(2)=-2$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$; $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

La courbe de f admet deux tangentes horizontales aux points d'abscisses 0 et 2



$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty$; $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}x^2=+\infty$ donc la courbe de f admet deux branches paraboliques de direction l'axe (OJ)

2) a) $A(a;a^3-3a^2+2)$; $B(-a;-a^3-3a^2+2)$ la droite (AB) a pour coefficient directeur. $\frac{2a^3}{2a}=a^2$ La tangente à (ζ) en un point M et

parallèle à (AB) si et seulement si : $f'(x)=a^2 \Leftrightarrow 3x^2-6x=a^2 \Leftrightarrow 3x^2-6x-a^2=0$. $\forall x\in IR^*$, l'équation $3x^2-6x-a^2=0$ admet deux racines x' et x'' et par suite il existe deux points M' et M'' de (ζ) où la tangente à (ζ) est parallèle à (AB).

b) Soit $I=M'*M''$; $x_I=\frac{x'+x''}{2}=1$ et $y_I=\frac{f(x')+f(x'')}{2}=\frac{x'^3-3x'^2+2+x''^3-3x''^2+2}{2}$

$=\frac{x'^3+x''^3-3(x'^2+x''^2)+4}{2}=\frac{(x'+x'')(x'^2-x'x''+x''^2)-3(x'^2+x''^2)+4}{2}$ or $x'+x''=2$ $x'x''=-\frac{a^2}{3}$.

$x'^2+x''^2=(x'+x'')^2-2x'x''=4+\frac{2a^2}{3}$ Donc $y_I=\frac{2\left(4+\frac{2a^2}{3}+\frac{a^2}{3}\right)-3\left(4+\frac{2a^2}{3}\right)+4}{2}=0$ Ainsi $I(1;0)$

Lorsque a varie dans IR^*, les points M' et M'' restent symétriques par rapport au point $I(1;0)$

EXERCICE 6 : 1) $D_f=IR$; f est une fonction polynôme donc dérivable sur IR et on a $f'(x)=3x^2+12x+9$;

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2+12x+9=0$ $a-b+c=3-12+9=0$ donc $x'=-1$ et $x''=-3$; $f(-1)=0$ et $f(-3)=4$

2) $I(-2;2)$; $x\in IR$ $2\times(-2)-x=-4-x\in IR$; $f(-4-x)=(-4-x)^3+6(-4-x)^2+9(-4-x)+4$

$=(-4-x)\left[(-4-x)^2+6(-4-x)+9\right]+4=(-4-x)(x^2+2x+1)$ $y=-x^3-6x^2-9x-4+4$

$=4-(x^3+6x^2+9x+4)=2\times2-f(x)$ Donc $I(-2;2)$ est un centre de symétrie de (ζ)

3) a) $T: y=f'(-2)(x+2)+f(-2)=-3(x+2)+2=-3x-6+2 \Rightarrow T: y=-3x-4$ (-2) est une racine du polynôme $x^3+6x^2+12x+8$ donc $f(x)+3x+4=(x-2)(ax^2+bx+c)=ax^3+(b-2a)x^2+(c-2b)x-2c$

donc par identification a $\begin{cases}a=1\\b-2a=6\\-2c=-8\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=1\\b=4\\c=4\end{cases}$ donc

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$(x+2)^3$		$-$	0	$+$	
Position		(ζ) est au dessous de T	$(\zeta)\cap T=\{1\}$	(ζ) est au dessus de T	

$f(x)+3x+4=(x+2)(x^2+4x+4)=(x+2)^3$

c) pour déduire la position de (ζ) et (T) il faut ét

b) $f(x)+3x+4=x^3+6x^2+9x+4+3x+4=x^3+6x^2+12x+8$ on remarque que udier le signe de $f(x)+3x+4$. d) voir figure. 4) $T_A=f'(a)(x-a)+f(a)$; $T_B=f'(b)(x-b)+f(b)$;

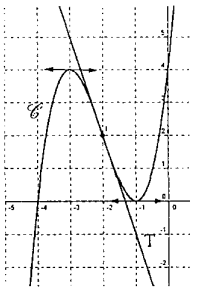
$f'(a)=3a^2+12a+9$; $f'(b)=3b^2+12b+9$ or on a : $a+b=-4 \Leftrightarrow a=-4-b$ donc

$f'(a)=3(-4-b)^2+12(-4-b)+9=3b^2+12b+9$. Ainsi on a : $f'(a)=f'(b)$ et par suite $T_A // T_B$

5) a) $g(x)=(x+1)^2|x+4|=\begin{cases}(x+1)^2(x+4) \text{ si } x\geq-4\\-(x+1)^2(x+4) \text{ si } x<-4\end{cases}$ donc $g(x)=\begin{cases}f(x) \text{ si } x\geq-4\\-f(x) \text{ si } x<-4\end{cases}$ soit θ la courbe de la restriction de f sur $[-4;+\infty[$ et β la courbe de la restriction de f sur $]-\infty;4[$ donc $\zeta_g=\theta\cup S_{(OI)}(\theta)$

b)

x	$-\infty$		-4		-3		-1		$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$-\infty$



EXERCICE 7: I) 1) $f(x)=x^3-6x^2+9x-2$; f est une fonction polynôme donc dérivable sur IR. $f'(x)=3x^2-12x+9$;

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x'=1$ et $x''=3$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$; $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$;

$f(1)=2$ et $f(3)=-2$.

2) On a $2\times2-x=4-x\in IR$;

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

$f(4-x)=(4-x)^3-6(4-x)^2+9(4-x)-2$

$=(4-x)\left[(4-x)^2-6(4-x)+9\right]-2=(4-x)(1-2x+x^2)$

$=2-9x+6x^2-x^3-2=2\times0-(x^3-6x^2+9x-2)$ donc $I(2;0)$ est un centre de symétrie de (ζ)

3) $T: y=f'(2)(x-2)+f(2)=-3x+6$. Position de (ζ_g) et (T) :

$g(x)-y=x^3-6x^2+9x-2+3x-6=x^3-6x^2+12x-8=(x-2)(x^2-4x+4)=(x-2)^3$.

4) a) Voir figure.

b) D'après la courbe ; la droite d'équation $y=0$ coupe (ζ) en 3 points d'abscisses $\alpha_1;2;\alpha_2$

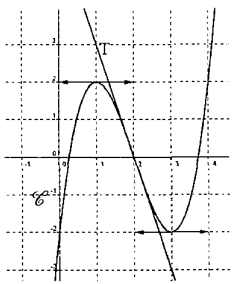
Signe def :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$(x-2)^3$		$-$	0	$+$	
Position		(ζ) est au dessous de T	(ζ) et T se coupent	(ζ) est au dessus de T	

5) a) D_a passe par le point 0 ;

d'abscisse

x	$-\infty$		α_1		2		α_2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	



$f(0)=-2$ donc $A(0;-2)\in D_a \Leftrightarrow D_a: y=ax-2$

b) Soit $M(x;y)\in(\zeta)\cap D_a \Leftrightarrow \begin{cases}y=f(x)\\y=ax-2\end{cases} \Leftrightarrow x^3-6x^2+9x-2=ax-2$

$\Leftrightarrow x(x^2-6x+9-a)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x^2-6x+9-a=0$;

$x^2-6x+9-a=0$: $\Delta=4a$ puisque (ζ) coupe D_a en deux points E et F donc $\Delta>0 \Leftrightarrow a>0$

c) $\xi_a = E*F \Leftrightarrow \xi_a\left(\frac{x_E+x_F}{2};\frac{y_E+y_F}{2}\right)$; On a $x_E+x_F=-\frac{-6}{1}=6$ et $y_E+y_F=a(x_E+x_F)-4=6a-4$ Ainsi

$\xi_a(3;3a-2);a>0$. Lorsque a varie sur IR_+^* ; ξ_a varie sur la demi droite d'équation : $\begin{cases}x=3\\y>-2\end{cases}$

II) $g(x)=\begin{cases}x^3-6x^2+9x-2 & \text{si } x\le 3\\(x-3)^2(x-6)-2 & \text{si } x>0\end{cases}$ .1) $x\mapsto x^3-6x^2+9x-2$ est continue sur IR en particulier en 3.

$f(x)=x^3-6x^2+9x-2$.

Puisque $g(x)=f(x)$ sur $]-\infty;3]$ alors $\lim\limits_{x\to 3^-} g(x)=f(3)=-2=g(3)$ donc g est continue à gauche en 3.

Soit $v(x)=(x-3)^2(x-6)-2$; v est continue sur IR en particulier en 3. Puisque $g(x)=v(x)$ sur $]3;+\infty[$ alors $\lim\limits_{x\to 3^+} g(x)=v(3)=-2=g(3)$ donc g est continue à droite en 3. Et par suite g est continue en 3.

2) La fonction $x\mapsto x^3-6x^2+9x-2$ est dérivable sur IR ; en particulier sur $]-\infty;3]$ et $\forall x\in]-\infty;3]$;

$g'(x)=3x^2-12x+9$ La fonction $(x-3)^2(x-6)-2$ est dérivable sur IR en particulier sur $]3;+\infty[$ et $\forall x\in]3;+\infty[$; $g'(x)=3x^2-24x+45$

$\Rightarrow\begin{cases}g'(x)=3x^2-12x+9 & \text{si } x\ge 3\\g'(x)=9x^2-24x+45 & \text{si } x<3\end{cases}$.

3) $G(3;-2)$; $D_g=IR$; $23-x=6-x\in IR$; si $x<3$ alors $6-x>3 \Leftrightarrow x\in]-\infty;3]$ alors $6-x\in]3;+\infty[$;

$g(6-x)+g(x)=(6-x-3)^2(6-x-6)-2+x^3-6x^2+9x-2=-4$; si $x\in]3;+\infty[$ alors $6-x\in]-\infty;3]$ et On a : $g(6-x)+g(x)=-4$ alors G est un centre de symétrie de (Γ)

4) On a G est un centre de symétrie et On a $\forall x\in]-\infty;3]$ alors $g(x)=f(x)$. Soit (ζ_1) la courbe de la restriction de f à $]-\infty;3]$ alors $\Gamma=\zeta_1\cup S_G(\zeta_1)$.

EXERCICE 8 : 1) f est dérivable sur IR et On a $f'(x)=3ax^2+2bx$; On a : f admet un extremum en 2 signifie $f'(2)=0 \Leftrightarrow 12a+4b=0$ donc $3a+b=0$ et On a aussi (ζ_f) coupe $(O;\vec{i})$ au point d'abscisse (-1) signifie $f(-1)=0 \Leftrightarrow -a+b+c=0$ et (ζ_f) coupe $(O;\vec{j})$ au point d'ordonné (4) signifie $f(0)=4 \Leftrightarrow c=4$. On a donc : $\begin{cases}3a+b=0\\b-a=-4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=-3a\\-4a=-4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\b=-3\end{cases}$ Ainsi $a=1$; $b=-3$ et $c=4$.

2) $f(x)=x^3-3x^2+4$. a) $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=2$;

$f(0)=4$ et $f(2)=0$. b) $f(-1)=(-1)^3-3(-1)^2+4=0$

c) Puisque $f(-1)=0$ donc le tableau de signe de f(x) est le suivant :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
f(x)		−		+		+	

3) a) $g(x)=f(\sin x)=\sin^3 x-3\sin x+4=(\sin x+1)(\sin^2 x-4\sin x+4)$

On a : $\sin^2 x-4\sin x+4>0$ et $\sin x+1\ge 0$ car $-1\le\sin x\le 1$ donc $\forall x\in IR$;

On a $g(x)\ge 0$

b) Voir Tableau :

c) D'après le tableau de variation ; On a g est strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ donc $0\le g(x)\le 2$

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$
g'(x)		+	
g(x)	0	↗	2

4)a) $(\zeta_h)=S_\Delta(\zeta_f)$ avec $\Delta: x=-\frac{1}{2} \Rightarrow \vec{j}$ est un vecteur directeur de Δ.

$M(x;y)$ et $M'(x';y')$ deux points du plan ; $M'=S_\Delta(M)$ avec Δ est la médiatrice de $[MM'] \Leftrightarrow \begin{cases}M*M'\in\Delta\\(MM')\perp\Delta\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x+x'}{2}=-\frac{1}{2}\\(x'-x)\times 0+(y'-y)\times 1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x'=-x-1\\y'=y\end{cases}$

b) $M(x;y)$ d'image $M'(x';y')$ par S_Δ ; $M'\in\zeta_h=S_\Delta(\zeta_f) \Leftrightarrow y=f(x) \Leftrightarrow y'=f(-x'-1)$;

$M(x;y)\in\zeta_h \Leftrightarrow y=f(-x-1)$ et $x\in IR$; $h(x)=f(-x-1)=(-x-1)^3-3(-x-1)^2+4$.

EXERCICE 9 : 1) pour tout $x\ne 1$, on a $f(x)=\frac{x^2}{x-1}=\frac{x^2-1+1}{x-1}=\frac{x^2-1}{x-1}+\frac{1}{x-1}=x+1+\frac{1}{x-1}$.

2) On a $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{1}{x-1}=0$ Donc la droite $\Delta: y=x+1$ est une asymptote oblique à (ζ) au voisinage de l'infini

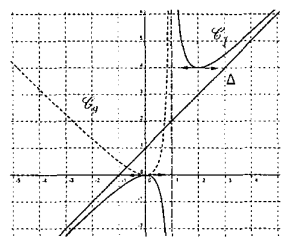
3) $f(x)-y=\frac{1}{x-1}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f(x)−y		+	‖	+	
Position		Δ est au dessus de(ζ)	‖	Δ est au dessous de(ζ)	

4) f est dérivable sur $IR\setminus\{1\}$ et on a $f'(x)=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	‖	−	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$. Puisque $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$ alors la droite d'équation $x=1$ est une asymptote verticale à (ζ)



5) $A(1;2)$; $P(\alpha;0)$ et y l'ordonnée de Q ; $Q(0;y)$ donc OPQ est un triangle rectangle en Q.

Aire$(OPQ)=\frac{OP\times OQ}{2}$ or $OP=|\alpha|$, $OQ=|y|$ Déterminons y en fonction de α. A ; P et Q sont alignés

donc $\overrightarrow{AP}\begin{pmatrix}\alpha-1\\-2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AQ}\begin{pmatrix}-1\\y-2\end{pmatrix}$ ainsi $(\alpha-1)(y-2)-2=0$

$\Leftrightarrow y=\dfrac{2\alpha}{\alpha-1}$ et par suite $OQ=\dfrac{|2\alpha|}{|\alpha-1|}$ et par conséquent : $\text{Aire}(OPQ)=\dfrac{OP\times OQ}{2}=\dfrac{|\alpha|.|2\alpha|}{2|\alpha-1|}=\dfrac{\alpha^2}{|\alpha-1|}$

6) $g(x)=A(x)=\dfrac{x^2}{|x-1|}$; a) $D_g=IR\setminus\{0;1\}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$ car $\dfrac{x^2}{|x-1|}$ est continue pour tout réel sauf 1 et par suite g est prolongeable par continuité en 0

et On a $G(x)\begin{cases}\dfrac{x^2}{|x-1|} & \text{si } x\in IR\setminus\{0;1\}\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$ ou encore $G(x)=\dfrac{x^2}{|x-1|}$ si $x\in IR\setminus\{1\}$

c) $G(x)\begin{cases}\dfrac{x^2}{x-1} & \text{si } x>1\\ -\dfrac{x^2}{x-1} & \text{si } x<1\end{cases}=\begin{cases}f(x) & \text{si } x>1\\ -f(x) & \text{si } x<1\end{cases}$. Soit ζ_1 la courbe de la restriction de f à $]1;+\infty[$ et ζ_2 la courbe de la restriction de f à $]-\infty;1[$. alors $\zeta_G=\zeta_1\cup S_{(O;\vec{j})}(\zeta_2)$

EXERCICE 10: 1) $f(x)=\dfrac{-2x^2-x+1}{x-1}=\dfrac{ax(x-1)+b(x-1)+c}{x-1}=\dfrac{ax^2+(b-a)x+c-b}{x-1}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2\\ b-a=-1\\ c-b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2\\ b=-3\\ c=-2\end{cases}$ donc $f(x)=-2x-3-\dfrac{2}{x-1}$.

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
f'(x)		−	0	+	‖	+	0	−	
f(x)	$+\infty$	↘	−1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	−9	↘	$-\infty$

2) f est dérivable sur $IR\setminus\{1\}$ et on a

$f'(x)=-2+\dfrac{2}{(x-1)^2}=\dfrac{-2(x-1)^2+2}{(x-1)^2}=\dfrac{2(-x^2+2x)}{(x-1)^2}$

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$ ou $x=2$ **Branches paraboliques :** La droite $\Delta_1: x=1$ est une asymptote verticale à (ζ) ;

$\lim\limits_{|x|\to+\infty}[f(x)-(-2x-3)]=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{-2}{x-1}=0$ donc la droite $\Delta_2: y=-2x-3$ est une asymptote oblique à (ζ) au voisinage à l'infini

3) $g(x)=\dfrac{1-x^2-(x+1)|x|}{x-1}$; $D_g=IR\setminus\{1\}$. a) Sur $]-\infty;0]$ on a $g(x)=\dfrac{1-x^2+(x+1)x}{x-1}=\dfrac{x+1}{x-1}$; la fonction $x\mapsto\dfrac{x+1}{x-1}$ est dérivable sur $IR\setminus\{1\}$ en particulier sur $]-\infty;0]$ donc g est dérivable sur $[0;1[$ et $]1;+\infty[$ et on a

$g'(x)=f'(x)=\dfrac{2(-x^2+2x)}{(x-1)^2}$ et $g'_g(0)=0$; on remarque que $g'_g(0)\neq g'_d(0)$ donc g n'est pas dérivable en 0.

Ainsi (ζ_g) admet au point $A(0;-1)$ une demi tangente à gauche de vecteur directeur $\vec{u}_g\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ et une demi tangente à droite de vecteur directeur $\vec{u}_d\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$; $g'(x)=\begin{cases}\dfrac{-2}{(x-1)^2} & \text{si } x\in]-\infty;0]\\ \dfrac{2(-x^2+2x)}{(x-1)^2} & \text{si } x\in[0;+\infty[\setminus\{1\}\end{cases}$

b) voir tableau de variation

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
g'(x)		−	‖	+	‖	+		−	
g(x)	1	↘	−1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	−9	↘	$-\infty$

c) sur $]-\infty;0]$ $g(x)-f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{-2x^2-x+1}{x-1}=\dfrac{2x(x+1)}{x-1}$

$g(x)-f(x)=0\Leftrightarrow x=0$ ou $x=-1$

x	$-\infty$		−1		0
f(x)−y		−	‖	−	
Position		(ζ') est au dessus de (ζ)	‖	(ζ') est au dessous de (ζ)	

Sur $[0;+\infty[\setminus\{1\}$ on a $g(x)=f(x)$; soit (C_1) la restriction de f à $[0;+\infty[\setminus\{1\}$ et (C'_1) la restriction de g à $[0;+\infty[\setminus\{1\}$ donc $(C_1)=(C'_1)$ sur $[0;+\infty[\setminus\{1\}$.

EXERCICE 11 : 1) a) $f(x)=\dfrac{-x^2+4x-7}{x-1}=\dfrac{-x^2+4x-3-4}{x-1}=\dfrac{-(x^2-4x-3)}{x-1}-\dfrac{4}{x-1}$

$=\dfrac{-(x-1)(x-3)}{x-1}-\dfrac{4}{x-1}=-x+3-\dfrac{4}{x-1}$ b) on a $\lim\limits_{|x|\to+\infty}[f(x)-(-x+3)]=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{-4}{x-1}=0$ alors la droite $\Delta: y=-x+3$ est une asymptote oblique à (ζ) au voisinage de ∞

2) f est dérivable sur $IR\setminus\{1\}$ et on a $f'(x)=-1+\dfrac{4}{(x-1)^2}=\dfrac{-(x-1)^2+4}{(x-1)^2}=\dfrac{-x^2+2x-1+4}{(x-1)^2}=\dfrac{-x^2+2x+3}{(x-1)^2}$

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1$ ou $x=3$. 3) $\Delta': x=1$ est une asymptote verticale à (ζ)

x	$-\infty$		−1		1		3		$+\infty$
f'(x)		−	0	+	‖	+	0	−	
f(x)	$+\infty$	↘	6	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	−2	↘	$-\infty$

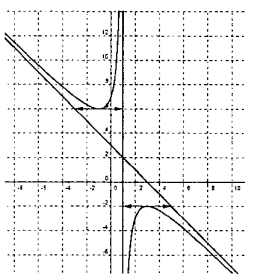
a) $\{I\}=\Delta\cap\Delta'$ donc $I(1;2)$ si $x\neq 1$ alors $-x\neq -1\Rightarrow 2-x\neq 1$

c'est-à-dire $2-x\in IR\setminus\{1\}$ $f(2-x)=-(2-x)+3-\dfrac{4}{2-x-1}$

$=-2+x+3-\dfrac{4}{1-x}=x+1+\dfrac{4}{x-1}=4-(-x+3)+\dfrac{4}{x-1}$

$=4-\left[-x+3-\dfrac{4}{x-1}\right]=2\times 2-f(x)$ et par suite $I(1;2)$ est un centre de symétrie à (ζ)

b) Voir courbe



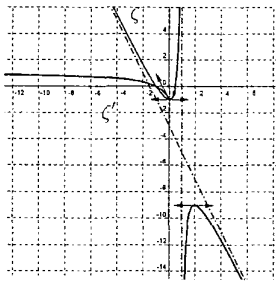
4) $f(x)=-x+3-\dfrac{4}{x-1}$. Soit $M(x;y)\in(\zeta)$ avec $x\in\mathbb{Z}$ et $y\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x\in\mathbb{Z}$ et $-x+3-\dfrac{4}{x-1}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\dfrac{4}{x-1}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow(x-1)$ est un diviseur de 4

$\Leftrightarrow(x-1)\in\{-4;-2;-1;1;2;4\}\Leftrightarrow x\in\{-3;-1;0;2;3;5\}$ ainsi les points de (ζ) dont les coordonnées sont des entiers relatifs sont :

$A(-3;7)$; $B(-1;6)$; $C(0;7)$; $D(2;-3)$; $E(3;-2)$ et $F(5;-3)$

5) $g(x)=\dfrac{x^2+4|x|+7}{1+|x|}$. Pour tout $x\in IR$; on a $-x\in IR$



$g(-x)=\dfrac{(-x)^2+4|-x|+7}{1+|-x|}=g(x)$ donc g est une fonction paire d'où

(ζ_g) admet (Oy) comme axe de symétrie.

Sur $]-\infty;0]$ on a $g(x)=f(x)$. Soit (C_1) la restriction de f sur $]-\infty;0]$

alors $(\zeta_g)=(C_1)\cup S_{(Oy)}(C_1)$

$g'_g(0)=f'(0)=3$ Donc (ζ_g) admet au point $C(0;7)$ une demi tangente à gauche de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$ Or (ζ_g) est symétrique par rapport à (Oy) donc (ζ_g) admet une demi tangente à droite de vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$

EXERCICE 12 : 1) a) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+5}{x-1}=\dfrac{x^2-2x+1+4}{x-1}=\dfrac{(x-1)^2}{x-1}+\dfrac{4}{x-1}=x-1+\dfrac{4}{x-1}$

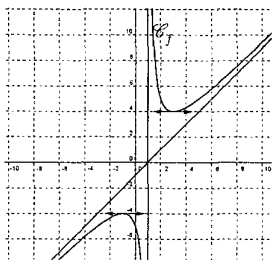
b) on a $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{x-1}=0$ alors la droite d'équation $y=x-1$ est une asymptote oblique à (ζ) au voisinage de ∞

2) On a $D_f=IR\setminus\{1\}$; si $x\neq1$ alors $2-x\neq1$;

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-4	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	4	↗	$+\infty$

$f(2-x)=2-x-1+\dfrac{4}{2-x-1}=1-x+\dfrac{4}{1-x}$

$=-(x-1)-\dfrac{4}{x-1}=-\left[x-1+\dfrac{4}{x-1}\right]=2\times0-f(x)$ donc $I(1;0)$ est un centre de symétrie de (ζ)



3) f est dérivable sur $IR\setminus\{1\}$ et on a :

$f'(x)=1-\dfrac{4}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x+1-4}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$;

$f'(x)=0\Leftrightarrow x^2-2x-3=0\Leftrightarrow x=-1$ ou $x=3$

4) a) $g(x)=|x-1|+\dfrac{4}{x-1}=\begin{cases}x-1+\dfrac{4}{x-1} & \text{si } x>1\\ 1-x+\dfrac{4}{x-1} & \text{si } x<1\end{cases}$; g est

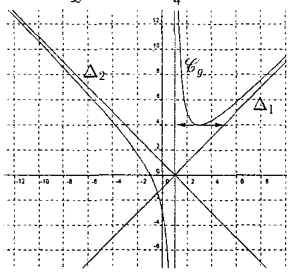
dérivable sur $IR\setminus\{1\}$ et $g'(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} & \text{si } x>1\\ \dfrac{-x^2+2x-5}{(x-1)^2} & \text{si } x<1\end{cases}$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		−	‖	−	0	+	
$g(x)$	$+\infty$	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	4	↗	$+\infty$

Sur $]1;+\infty[$; $g'(x)=0\Leftrightarrow x^2-2x-3=0\Leftrightarrow x=-1$ ou $x=3$

Sur $]-\infty;1[$; $g'(x)=0\Leftrightarrow -x^2+2x-5=0$;

$\Delta=4-24=-20$ Donc $g'(x)<0\ \forall x\in]-\infty;1[$



b) Sur $]1;+\infty[$; $g(x)=x-1+\dfrac{4}{x-1}$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)-(x-1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x-1}=0$ donc la droite $\Delta_1:y=x-1$ est une asymptote oblique à (ζ_g) au voisinage de $(+\infty)$.

Sur $]-\infty;1[$; $g(x)=1-x+\dfrac{4}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[g(x)-(1-x)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4}{x-1}=0$

donc la droite $\Delta_2:y=1-x$ est une asymptote oblique à (ζ_g) au voisinage de $(-\infty)$.

c) Voir figure.

EXERCICE 13: 1) On a : $x\neq0$ et $x\neq-4$; d'une part on a :

$\lim\limits_{x\to-4}(x+4)f(x)=\lim\limits_{x\to-4}a(x+4)+\dfrac{b(x+4)}{x}+c=c$ d'autre part $\lim\limits_{x\to-4}(x+4)f(x)=\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{-x^2-3x+2}{x}=\dfrac{1}{2}$ d'où

$c=\dfrac{1}{2}$. $\lim\limits_{x\to0}xf(x)=\lim\limits_{x\to0}ax+b+\dfrac{xc}{x+4}=b$. $\lim\limits_{x\to0}xf(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-x^2-3x+2}{x+4}=\dfrac{1}{2}$ d'où

$b=\dfrac{1}{2}$. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}a+\dfrac{b}{x}+\dfrac{c}{x+4}=a$; $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-1$

d'où $a=-1$. Ainsi $f(x)=-1+\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{2(x+4)}$

x	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
$f'(x)$		−	‖	−		+	
$f(x)$	-1	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘ $-\infty$		$+\infty$ ↘	-1

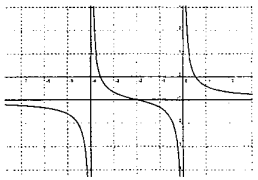
2) f est une fonction rationnelle ; donc dérivable sur $IR\setminus\{-4;0\}$ et on a :

$f'(x)=\dfrac{-2}{(2x)^2}-\dfrac{2}{4(x+4)^2}=\dfrac{-8(x+4)^2-8x^2}{16x^2(x+4)^2}$ $f'(x)<0\forall x\in IR\setminus\{4\}$. Les droites d'équations $x=-4$ et

$x=0$ sont des asymptotes verticales à (ζ) et puisque $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)=-1$ alors la droite d'équation $y=-1$ est une asymptote horizontale à (ζ)

3) $y=m$; Pour $m=0$ on a 2 points d'intersection ; Pour $m=-1$ on a un seul point d'intersection. Si $m\in\,]-1;0[$ on a 2 points d'intersection

Si $m\in\,]0;+\infty[$ on a 2 points d'intersection . Si $m\in\,]-\infty;-1[$ on a 2 points d'intersection



4) a) $g(x)=f(-|x|)$; g est définie si et seulement si, $-|x|\neq 0$ et $-|x|\neq -4$.

On a $-|x|\neq 0$ évidentcar $x\neq 0$; $|x|\neq 4$ donc $x\neq -4$ et $x\neq 4$

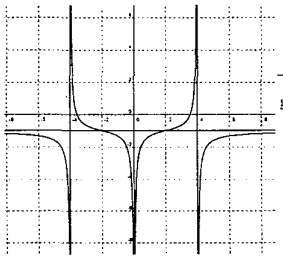
pourtout $x\in IR\setminus\{-4;0\}$ $g(-x)=f(-|-x|)=f(-|x|)=g(x)$; la fonction g est paire

Pour tout $x\in\,]-\infty;0[\setminus\{-4\}$;

$g(x)=f(-(-x))=f(x)$.

Soit Γ_1 la restriction de la courbe de g à $]-\infty;0[\setminus\{-4\}$

Puisque g est paire ; a restriction de g à $]0;+\infty[\setminus\{4\}$ est la symétrie



x	$-\infty$		-4		0		4		$+\infty$
g(x)	-1	↘	$+\infty$	↘	$+\infty$	↗	$+\infty$	↗	-1
			$-\infty$		$-\infty$ $-\infty$		$-\infty$		

de Γ_1 par rapport à (Oy). Donc $(\zeta_g)=\Gamma_1\cup S_{(Oy)}(\Gamma_1)$

Exercice14 : 1) f est dérivable sur IR^* et on a, pour tout $x\in IR^*$

2) g est dérivable sur IR et On a : $g'(x)=6x^2+2x=2x(3x+1)$;

$g'(x)=0\Leftrightarrow x=0$ ou $x=-\frac{1}{3}$; $g(0)=-1$ et $g\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{26}{27}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		0		α		$+\infty$
g'(x)		+	0	−	0		+		
g(x)	$-\infty$	↗	$-\frac{26}{27}$	↘	-1	↗	0	↗	$+\infty$

3) g est continue sur $[0;1]$; $g(0)=-1$ et $g(1)=2$ On a $g(1)\times g(2)<0$ donc l'équation $g(x)=0$ admet dans IR une unique solution α dans $]0;1[$.

4) On a $f'(x)=\frac{1}{3x^2}g(x)$; $f'(x)=0\Leftrightarrow g(x)=0\Leftrightarrow x=\alpha$.

On remarque que $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
f'(x)		−	‖	−	0	+	
f(x)	$+\infty$	↘	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

5) a) $I(-1;f(-1))$; $f(-1)=-\frac{1}{3}\Rightarrow I\left(-1;-\frac{1}{3}\right)$. $J(1;f(1))$;

$f(1)=1\Rightarrow J(1;1)$. L'équation de la tangente à (ζ) en J est $\Delta: y=f'(1)(x-1)+f(1)=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$. Pour $x=-1$ alors $y=-\frac{1}{3}$ Donc $I\in\Delta$ et par suite (IJ) est tangente à (ζ) en J.

b) L'équation de la tangente à (ζ) en I est $T: y=f'(-1)(x+1)+f(-1)=-\frac{2}{3}x-1$

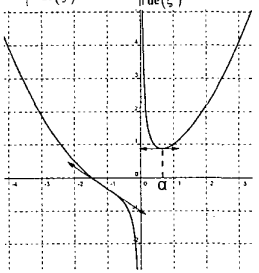
c) Position de (ζ) et Δ' ;

$f(x)-y=\frac{1}{3}\left(x^2+x+\frac{1}{x}\right)-\left(-\frac{2}{3}x-1\right)$

$=\frac{1}{3}x^2+x+\frac{1}{3x}+1=\frac{x^3+3x^2+3x+1}{3x}=\frac{(x+1)^3}{3x}$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
3x		−		−	‖	+	
$(x+1)^3$		−	0	+		+	
f(x)−y		+	0	−	‖	+	
Position		T est au dessous de (ζ)		T est au dessus de (ζ)		T est au dessous de (ζ)	

6) On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$ Donc (ζ) admet une branche parabolique de direction $(O\vec{j})$ au voisinage de $(+\infty)$ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$ donc (ζ) admet une asymptote verticale d'équation $x=0$



Exercice15 : I) 1) a)

$f(x)=\frac{x^2-2x+5}{x-1}=\frac{x^2-2x+1+4}{x-1}=\frac{(x-1)^2+4}{x-1}=x-1+\frac{4}{x-1}$

b) $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{4}{x-1}=0$ donc la droite $\Delta_1: y=x-1$ est une asymptote oblique à (ζ_f) au voisinage de l'infini.

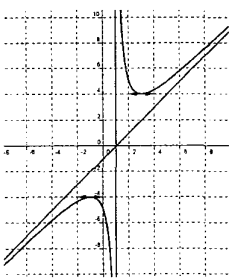
2) $D_f=IR\setminus\{1\}$; si $x\neq 1\Leftrightarrow -x\neq -1\Leftrightarrow 2-x\neq 1$ donc $2-x\in D_f$

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	‖	−	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	-4	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

$f(2-x)=\frac{(2-x)^2-2(2-x)+5}{2-x-1}$

$=\frac{4-4x+x^2-4+2x+5}{1-x}=\frac{-x^2+2x-5}{x-1}$

$f(2-x)+f(x)=\frac{-x^2+2x-5+x^2-2x+5}{x-1}=\frac{0}{x-1}=0$ donc le point $I(1;0)$ est un centre de symétrie de (ζ_f)



3) f est dérivable sur $IR\setminus\{1\}$ et on a :

$f'(x)=\frac{(2x-2)(x-1)-(x^2-2x+5)}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-4x+2-x^2+2x-5}{(x-1)^2}$

$=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$ $f'(x)=0\Leftrightarrow x^2-2x-3=0$; $a-b+c=1-(-2)-3=0$

Donc $x' = -1$ et $x'' = 3$ d'où le tableau de variation.

5) a) $H(x) = |x-1| + \frac{4}{x-1} = \begin{cases} x-1+\frac{4}{x-1} & \text{si } x>1 \\ 1-x+\frac{4}{x-1} & \text{si } x<1 \end{cases}$ H est dérivable sur IR $\setminus\{1\}$ et on a :

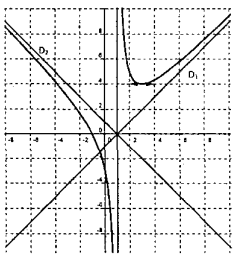
$H'(x) = \begin{cases} f'(x) & \text{si } x \geq 1 \\ -1-\frac{4}{(x-1)^2} & \text{si } x<1 \end{cases} = \begin{cases} f'(x) & \text{si } x \geq 1 \\ -\left(1+\frac{4}{(x-1)^2}\right) & \text{si } x<1 \end{cases}$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$H'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$H(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{x-1} = 0$ Donc $D_1 : y = x-1$ est une asymptote oblique à (ζ_{H}) au voisinage de $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(1-x)\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{x-1} = 0$ Donc $D_2 : y = 1-x$ est une asymptote oblique à (ζ_{H}) au voisinage de $-\infty$

c) Voir figure.



II) $g(x) = \sqrt{x^2-4x+5}$. 1) Soit : $x^2-4x+5=0$;

$\Delta = 16-20 = -4$ donc $x^2-4x+5>0 \forall x \in$ IR et par suite $D_g =$ IR ;

si $x \in$ IR alors $4-x \in$ IR ;

$g(4-x) = \sqrt{(4-x)^2-4(4-x)+5} = \sqrt{16-8x+x^2-16+4x+5}$

$= \sqrt{x^2-4x+5} = g(x)$ ainsi $\Delta : x = 2$ est un axe de symétrie à (ζ_g)

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[g(x)-(-x+2)\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2-4x+5}+x-2\right]$

$= \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-4x+5-(x-2)}{\sqrt{x^2-4x+5}-x+2} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{9}{\sqrt{x^2-4x+5}-x+2} = 0$ donc la droite

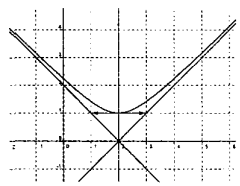
$D : y = -x+2$ est une asymptote à (ζ_g) au voisinage de $(-\infty)$

3) g est dérivable sur IR et On a : $g'(x) = \frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+5}} = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}}$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

4) Voir figure :



III) $k(x) = \begin{cases} f(x)-4 & \text{si } x>2 \\ g(x) & \text{si } x \leq 2 \end{cases}$. 1) $\lim\limits_{x\to2^-} K(x) = f(2)-4 = 1$;

$\lim\limits_{x\to2^-} K(x) = g(2) = 1$ on a $\lim\limits_{x\to2^+} K(x) = \lim\limits_{x\to2^-} K(x) = K(2)$ donc K est continue en 2.

Dérivabilité en 2 : $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{K(x)-K(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to2^+}\frac{f(x)-5}{x-2} = \lim\limits_{x\to2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = f'(2) = -3$

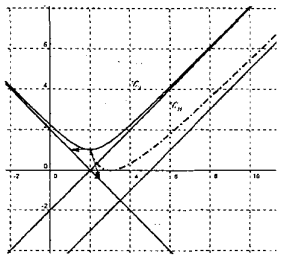
$\lim\limits_{x\to2^-}\frac{K(x)-K(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to2^-}\frac{g(x)-1}{x-2} = \lim\limits_{x\to2^-}\frac{g(x)-g(2)}{x-2} = g'(2) = 0$; $K'_d(2) \neq K'_g(2)$ donc K n'est pas dérivable en 2.

2) K est dérivable sur IR $\setminus\{2\}$ et on a : $K'(x) = \begin{cases} f'(x) & \text{si } x>2 \\ g'(x) & \text{si } x \leq 2 \end{cases}$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$K'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$K(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

3) On a : $\frac{n^2+1}{n^2+2} < \frac{n^2+1}{n^2+3} < 1$ et K est strictement décroissante sur $]-\infty;1[$ donc $K\left(\frac{n^2+1}{n^2+2}\right) > \left(\frac{n^2+1}{n^2+3}\right)$.

4) La courbe :



Exercice n°16 : 1)

a) $f(0) = -\frac{3}{2}$. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x^2+2x+3}{x(x-2)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{x^2} = -1$.

$\lim\limits_{x\to2}(x-2)f(x) = \lim\limits_{x\to2} -x^2+2x+3 = 3$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x(x-2)} = a$,

$\lim\limits_{x\to2}(x-2)f(x) = \lim\limits_{x\to2}(x-2)(ax+b)+c = c$ et $f(0) = b-\frac{c}{2}$ donc on va résoudre le système : $\begin{cases} b-\frac{c}{2} = -\frac{3}{2} \\ a = -1 \\ c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = -1 \\ c = 3 \end{cases}$.

2) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{2\}$. Pour tout $x \in D_f$, on a $x \neq 2 \Leftrightarrow -x \neq -2 \Leftrightarrow 4-x \neq 2 \Leftrightarrow (4-x) \in D_f$ et on a :

$f(4-x)+f(x) = -4+x+\frac{3}{2-x}+(-x)+\frac{3}{x-2} = -4$ donc $f(4-x) = -4-f(x)$ alors I(2,-2) est un centre de symétrie pour ζ_f

3) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)-y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} -x+\frac{3}{x-2}-(-x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{3}{x-2} = 0$ donc $\Delta : y = -x$ est une asymptote oblique à ζ_f.

4) f est une fonction rationnelle alors f est dérivable sur $D_f = \mathbb{R}\setminus\{2\}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$:

$f'(x) = \frac{(-2x+2)(x-2)-(-x^2+2x+3)\times1}{(x-2)^2} = \frac{-2x^2+4x+2x-4+x^2-2x-3}{(x-2)^2} = \frac{-x^2+4x-7}{(x-2)^2}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2+4x-7 = 0$; $\Delta = b^2-4ac = 16-28 = -12 < 0$ donc $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$ et son signe est celui de $-x^2+4x-7$ car $(x-2)^2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$ donc $f'(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-x^2}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to2^-} \frac{-x^2+2x+3}{x-2} = \frac{3}{0^-} = -\infty$ et

$\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to2^+} \frac{-x^2+2x+3}{x-2} = \frac{3}{0^+} = +\infty$

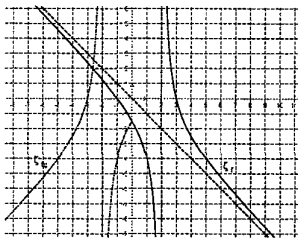
x	$-\infty$		2		$+\infty$
f'(x)		-	‖	+	
f(x)	$+\infty$ ↘		$-\infty$ ‖ $-\infty$	↘	

5)

x	0	1	2	3	4
f(x)	$-\frac{3}{2}$	-4		0	$-\frac{5}{2}$

x	0	1
y	0	-1

6) a)



$D_g = \mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$. Pour tout $x \in D_g$, on a $x \neq 2$ et $x \neq -2 \Leftrightarrow -x \neq -2$ et $-x \neq 2 \Leftrightarrow -x \in D_g$ et on a :

$g(-x) = |-x| + \frac{3}{|-x|-2} = |x| + \frac{3}{|x|-2} = g(x)$ donc g est une fonction paire alors $(O,\vec{i})$ est un axe de symétrie pour ζ_g

b- voir figure.

7)

$M(x,y) \in \zeta_f \cap D_k \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{-x^2+2x+3}{x-2} \text{ et } x \in \mathbb{R}\setminus\{2\} \\ y = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R}\setminus\{2\} \\ \frac{-x^2+2x+3}{x-2} = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R}\setminus\{2\} \\ -x^2+2x+3 = k(x-2) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R}\setminus\{2\} \\ -x^2+(2-k)x+3+2k = 0 : (E) \end{cases}$. Si $x = 2$, $-2^2+(2-k)2+3+2k = 3 \neq 0$ donc 2 n'est pas une solution de

(E). on a : $\begin{cases} a = -1 \\ b = 2-k \\ c = 3+2k \end{cases} \Rightarrow \Delta_x = b^2-4ac = (2-k)^2 - 4\times(-1)\times(3+2k) = k^2+4k+16$. $\begin{cases} a' = 1 \\ b' = 4 \\ c' = 16 \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta_k = b^2-4ac = 16-64 = -48 > 0$ donc $\Delta_x > 0$ pour tout réel k car $a' > 0$ d'où (E) admet deux racines distincts x' et x'' alors $\zeta_f \cap D_k = \{M(x',y');M(x'',y'')\}$. On pose $I(x,y) = M'*M''$ donc

$\begin{cases} x = \frac{x'+x''}{2} = \frac{-\frac{b}{a}}{2} = \frac{-\frac{(2-k)}{-1}}{2} = \frac{2-k}{2} \\ y = \frac{y'+y''}{2} = \frac{k+k}{2} = k \end{cases}$ donc $y = -2x+2$ alors l'ensemble des points I est la droite

D : y = -2 x +2

Exercice n°17 : 1) f est une fonction rationnelle donc f est dérivable sur son domaine de définition $D_f = \mathbb{R}$ car $x^2+x+1 \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = \frac{(2x-2)(x^2+x+1)-(x^2-2x-2)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$

$= \frac{3x^2+6x}{(x^2+x+1)^2} = \frac{3x(x+5)}{(x^2+x+1)^2}$

x	$-\infty$		-2		0		$-\infty$
f'(x)		+	0	-	0	+	
f(x)	1	↗	2	↘	1	↗	

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -2$. Le signe de $f'(x)$ est celui de 3x(x+2).

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$, f(-2) = 2et f(0) = -2.

2) a) (T) = $f'(1)(x-1)+f(1)$ = 1.(x-1)+(-1) = x - 2 .

b) $f(x)-y = \frac{x^2-2x-2}{x^2+x+1} - (x-2) = \frac{x^2-2x-2-(x-2)(x^2+x+1)}{x^2+x+1} = \frac{-x^3+2x^2-x}{x^2+x+1} = \frac{-x(x-1)^2}{x^2+x+1}$

or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2+x+1 > 0$ donc le signe de f(x) – y est celui de $-x(x-1)^2$.

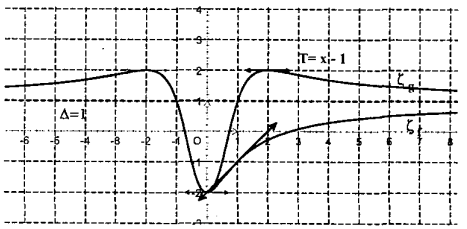
x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
Signe de f(x) – y		-	0	+	0	+	
Position de (ζ_f) par rapport à (T)		Au dessous	confondue	Au dessus	confondue	Au dessous	

3)

x	-6	-4,5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
f(x)	1,48	1,57	1,69	1,85	2	1	-2	-1	-0,28	0,07	,028

x	0	1
y	-2	-1

4) Les droites $D_m = x + m$ sont parallèles à (T). Donc pour tout réel m de]-2,+∞[, D_m coupent (ζ_f) en un seul point. Alors f(x) = x + m admet une solution unique dans $\mathbb{R}$.



5) a) Pour tout $x \in \mathbb{R}, (-x) \in \mathbb{R}$,

$g(-x) = \frac{(-x)^2+2|-x|-2}{(-x)^2-|-x|+1} = \frac{x^2+2|x|-2}{x^2-|x|+1} = g(x)$

donc g est paire.

b)pour tout $x \leq 0$, on a $|x| = -x$ donc

$g(x) = \frac{x^2-2x-2}{x^2+x+1} = f(x)$ et on a g est paire alors l'axe $(O,\vec{j})$ est un axe de symétrie à (ζ_f). Soit (ζ') la représentation graphique de la restriction de f sur]-∞,0]. Donc $\zeta_g = \zeta' \cup S_{(O,\vec{j})}(\zeta')$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x^2+2|x|-2}{x^2-|x|+1}+2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x^2+2|x|-2+2x^2-2|x|+2}{x^2-|x|+1}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2}{x\left(x^2-|x|+1\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{x^2-|x|+1}=0$ donc g est dérivable en 0 et $g'(0)=0$.

Exercice n°18: I- 1) Soit $K(\alpha,\beta)\in\zeta_m, \forall m\in\mathbb{R}$ alors $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ et $f_m(\alpha)=\dfrac{m\alpha^2-3\alpha+5-m}{\alpha-1}=\beta$, $\forall m\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m\alpha^2-3\alpha+5-m=\beta(\alpha-1)\\ \text{et } \alpha\neq 1\end{cases}$, $\forall m\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}(\alpha^2-1)m-3\alpha-\beta\alpha+\beta+5=0\\ \alpha\neq 1\end{cases}$, $\forall m\in\mathbb{R}$ donc l'équation du premier degré d'inconnue: $(\alpha^2-1)m-3\alpha-\beta\alpha+\beta+5=0$ m admet une infinité

Alors $\begin{cases}\alpha^2-1=0\\ \text{et}:-3\alpha-\beta\alpha+\beta+5=0\\ \alpha\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=-1\\ \beta=-4\end{cases}$.

Conclusion : toute les courbes ζ_m passent par le point fixe $K(-1,-4)$.

2) a) $f'_m(x)=\dfrac{(2mx-3)(x-1)-(mx^2-3x+5-m)}{(x-1)^2}=\dfrac{2mx^2-2mx-3x+3-mx^2+3x-5+m}{(x-1)^2}$

donc $f'_m(x)=\dfrac{mx^2-2mx-2+m}{(x-1)^2}$. On a le signe de f'_m est celui de $mx^2-2mx-2+m$ car $(x-1)\leq 0, \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'_0(x)$		-	‖	-	
$f_0(x)$		↘	‖	↘	

1er cas : si m=0 $\Rightarrow f'_0(x)=\dfrac{-2}{(x-1)^2}<0\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

2ème cas : si $m\neq 0$

$mx^2-2mx-2+m=0$ est une équation du second degré. $\Delta=b^2-4ac=(-2m)^2-4m(-2+m)=8m$. Comme $m\neq 0$ alors il y a deux cas :

1er cas : Si $m<0\Rightarrow\Delta<0\Rightarrow mx^2-2mx-2+m<0$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'_m(x)$		-	‖	-	
$f_m(x)$		↘	‖	↘	

2ème cas :

$x'=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{2m+2\sqrt{2m}}{2m}\boxed{=1+\dfrac{\sqrt{2m}}{m}}$

Si $m>0\Rightarrow\Delta>0\Rightarrow$ et

$x'=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{2m-2\sqrt{2m}}{2m}\boxed{=1-\dfrac{\sqrt{2m}}{m}}$

x	$-\infty$		$1-\frac{\sqrt{2m}}{m}$		1		$1+\frac{\sqrt{2m}}{m}$		$+\infty$
$f'_m(x)$		+	0	-	‖	-	0	+	
$f_m(x)$		↗		↘	‖	↘		↗	

II) $m=2\Rightarrow f(x)=f_2(x)=\dfrac{2x^2-3x+3}{x-1}$.

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}2x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}2x=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x^2-3x+3}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2}{0^-}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x^2-3x+3}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2}{0^+}=+\infty$.

$f(0)=-3$ et $f(2)=5$.

2) a- on

$a: 2x-1+\dfrac{2}{x-1}=\dfrac{(2x-1)(x-1)+2}{2x-1}=f(x)$.

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	‖	-	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	-3	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	5	↗	$+\infty$

b) on a : $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{1^-}f=-\infty\\ \lim\limits_{1^+}f=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow$ la droit D : x = 1 est asymptote verticale à ζ_f.

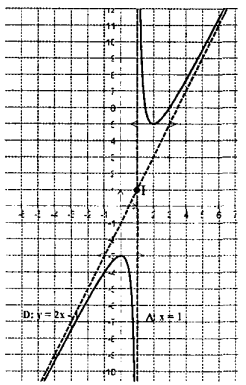
$\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)-(2x-1)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2}{x-1}=0\Rightarrow$ la droite $\Delta: y=2x-1$ est une asymptote oblique à ζ_f.

c- $\{I(x,y)\}=D\cap\Delta\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=2x-1\end{cases}\Rightarrow I(1,1)$.

Soit $x\in D_f\Leftrightarrow x\neq 1\Leftrightarrow 2\times 1-x\neq 1\Leftrightarrow\in D_f$, de plus on

$a: f(2-x)+f(x)=\left[2(2-x)-1+\dfrac{2}{2-x-1}\right]+\left[2x-1+\dfrac{2}{1-x}\right]=2$

donc $f(2-x)+f(x)=2\Leftrightarrow f(2-x)=2\times 1-f(x)$ donc I est le centre de symétrie pour ζ_f.



d- $\Delta: y=2x-1$; $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}_{(\vec{i},\vec{j})}$. $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$, $\overrightarrow{IM}=X\vec{u}+Y\vec{j}$ et $M\in\zeta_f$.

$\overrightarrow{IM}=X\vec{u}+Y\vec{j}\Leftrightarrow\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OM}=X\vec{u}+Y\vec{j}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=X\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+Y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=X\\ y-1=2X+Y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=X+1\\ y=2X+1+Y\end{cases}$ or

$M\in\zeta_f$ alors $\begin{cases}f(x)=y\\ \text{et } x\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(X+1)=2X+1+Y\\ X\neq 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2(X+1)-1+\dfrac{2}{X+1-1}=2X+1+Y\\ X\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2X+1+\dfrac{2}{X}=2X+1+Y\\ X\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow$

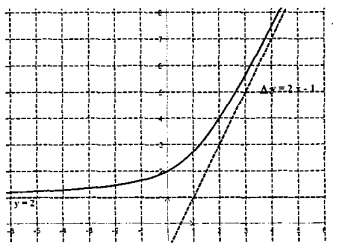
$\boxed{\begin{cases}Y=\dfrac{2}{X}\\ X\neq 0\end{cases}}$: c'est l'équation de ζ_f selon le repère $(I,\vec{u},\vec{j})$.

Exercice 19 :1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2-2x+4}+x\right)\left(\sqrt{x^2-2x+4}-x\right)}{\left(\sqrt{x^2-2x+4}-x\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cancel{x^2}-2x+4-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}-x}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\left(-2+\frac{4}{x}\right)}{-x\left[\sqrt{\left(1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}+1\right]}=\dfrac{-2}{-2}=1$ $y=1$ est une asymptote oblique à ζ_f au voisinage de $(-\infty)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-y=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-2x+4}+x-2x+1=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left[\sqrt{x^2-2x+4}-(x-1)\right]\left[\sqrt{x^2-2x+4}+(x-1)\right]}{\sqrt{x^2-2x+4}+(x-1)}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-2x+4-x^2+2x-1}{\sqrt{x^2-2x+4}+x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}+1-\frac{1}{x}\right)}=0$



Donc $\Delta: y=2x-1$ est un asymptote oblique à ζ_f au voisinage de $(+\infty)$

3)a) $x\mapsto x^2-2x+4$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$

$x\mapsto\sqrt{x^2-2x+4}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$\forall x\in\mathbb{R}\ ;f'(x)=\dfrac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+4}}+1=\dfrac{(x-1)+\sqrt{x^2-2x+4}}{\sqrt{x^2-2x+4}}$

Le signe de $f(x)$ est celui de $x-1+\sqrt{x^2-2x+4}$, $x\in[1,+\infty[$: $\left(x-1+\sqrt{x^2-2x+4}\right)>0$

$x\in]-\infty,1]:\sqrt{x^2-2x+4}+(x-1)=\dfrac{-3<0}{\sqrt{x^2-2x+4}-\underbrace{(x-1)}_{<0}}>0$

$\Rightarrow\forall x\in\mathbb{R};f'(x)>0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	1 ↗	$+\infty$

5)a) $f(x+1)-1=\sqrt{(x+1)^2-2(x+1)+4}+x+1-1=\sqrt{x^2+2x+1-2x-2+4}+x=\sqrt{x^2+3}+x=g(x)$

b) $f(x)\xrightarrow{t_{-j}}f(x+1)\xrightarrow{t_{-i}}f(x+1)-1$

$t_{\vec{u}}(\zeta_f)=\zeta_g$ avec $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}_{(i,j)}$

EXERCICE20 :1) a) Pour tout x on a : la fonction $x\mapsto x$ est dérivable sur IR ; $x\mapsto x^2+1$ est dérivable sur IR et $x^2+1>0$ donc $\sqrt{x^2+1}$ est dérivable sur IR. $\forall\ x\in IR$ On a : $g'(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}x}{x^2+1}$

$=\dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{1+x^2}}$

b) $g'(x)=\dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{1+x^2}}>0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=2$; $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}1+\dfrac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to-\infty}1+\dfrac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}1-\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=0$. On a pour tout $x\in IR$; $g(x)\in\,]0;1[$ signifie que $g(x)>0$ pour tout $x\in IR$

2) $f(x)=x-1+\sqrt{1+x^2}$.

a) $1+x^2>0$ et $x\to1+x^2$ dérivable sur IR donc f est dérivable sur IR et On a : $f'(x)=1+\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}$

$=1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}=g(x)$

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	0 ↗	2

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x-1+\sqrt{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x-1)^2-x^2-1}{x-1-\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x}{x-1-|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x}{x\left(1-\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2}{1-\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=-\dfrac{2}{2}=-1$ alors la droite d'équation $y=-1$ est une asymptote horizontale à (ζ)

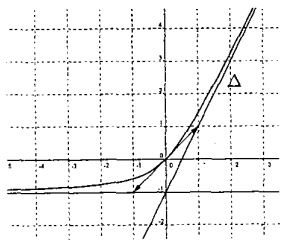
x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	-1 ↗	$+\infty$

c) $f'(x)=g(x)\geq0$

3) a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2x-1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-1+\sqrt{x^2+1}-2x+1\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-x$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$ alors la droite $\Delta: y=2x-1$ est une asymptote oblique (ζ) en $+\infty$.



b) $f(x)-y=\sqrt{x^2+1}-x$; On $x^2+1>x^2$ donc $\sqrt{x^2+1}>|x|$

$\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}>x$ et $\sqrt{x^2+1}>-x$ ce qui donne $\sqrt{x^2+1}-x>0$ et par suite (ζ) est au dessus de Δ.

c) $T: y = f'(0)\times x + f(0) \Leftrightarrow T: y = x$ Position de (ζ) et (T) : $f(x) - y = x - 1 + \sqrt{1+x^2} - x = \sqrt{1+x^2} - 1 > 0$ donc (ζ) est au dessus de (T)

d) voir figure

EXERCICE21 : 1) $f(x) = 2\sqrt{1+x^2} - x$; On a pour tout $x \in IR$ $1 + x^2 > x^2$ d'où $\sqrt{1+x^2} > |x|$ ce qui donne que $\sqrt{1+x^2} > x$ et $\sqrt{1+x^2} > -x$ et par suite $\sqrt{1+x^2} - x > 0$ et $\sqrt{1+x^2} + x > 0$;
puisque $\sqrt{1+x^2} - x > 0$ alors $2\sqrt{1+x^2} - x > \sqrt{1+x^2} > 0$ d'où $f(x) > 0$ pour tout $x \in IR$.

2) f est dérivable sur IR et On a : $f'(x) = 2\times\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} - 1$

$= \frac{2x - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$. Soit la fonction $h(x) = 2x - \sqrt{1+x^2}$; h est dérivable sur IR et On a : $h'(x) = 2 - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{2\sqrt{1+x^2} - x}{\sqrt{1+x^2}}$;

x	$-\infty$		$\sqrt{\frac{1}{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\sqrt{3}$	↗	$+\infty$

$h'(x) > 0$ car $2\sqrt{1+x^2} - x > 0$; $h(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} = 2x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + x^2 = 4x^2 \\ 2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 = 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{1}{3}}$. On a $h\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = 0$.* Si $x \leq \sqrt{\frac{1}{3}}$ alors $h(x) \leq h\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = 0$ donc $h(x) \leq 0$.

x	$-\infty$		$\sqrt{\frac{1}{3}}$		$+\infty$
$h(x)$		$-$	0	$+$	

* Si $x \geq \sqrt{\frac{1}{3}}$ alors $h(x) \geq h\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = 0$ donc $h(x) \geq 0$. On a $f'(x) = \frac{2x - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{h(x)}{\sqrt{1+x^2}}$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2\sqrt{1+x^2} - x = (+\infty - \infty)$ Forme indéterminée.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - x = \lim_{x\to+\infty} x\left(2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - 1\right) = +\infty$; $f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \sqrt{3}$

3) a) $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(2\sqrt{1+x^2} - 2x\right)$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2\left(\sqrt{1+x^2} + x\right)\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)}{\sqrt{1+x^2} + x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{1+x^2} + x} = 0$

car $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+x^2} = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$. On conclut que la droite $D: y = x$ est une asymptote à ζ_f en $+\infty$

b) $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x) - (-3x)\right] = \lim_{x\to-\infty} 2\sqrt{1+x^2} - x + 3x = \lim_{x\to-\infty} 2\sqrt{1+x^2} + 2x$

$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2\left(\sqrt{1+x^2} + x\right)\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)}{\sqrt{1+x^2} - x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{\sqrt{1+x^2} - x} = 0$ donc la droite $\Delta: y = -3x$ est une asymptote oblique à ζ_f en $-\infty$

c) Position de (ζ) et Δ : $f(x) + 3x = 2\sqrt{1+x^2} + 2x = 2\left(\sqrt{1+x^2} + x\right) > 0$ d'après 1) donc (ζ) est au dessus de Δ.

Position de (ζ) et D : $f(x) - x = 2\sqrt{1+x^2} - 2x = 2\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) > 0$ d'après 1) donc (ζ) est au dessus de D. 4) voir figure.

EXERCICE 22: 1) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x + 1}$; il faut que $-x^2 + 2x + 1 \geq 0$, $-x^2 + 2x + 1 = 0$; $\Delta = 4 + 4 = 8$;

$x' = \frac{-2 - 2\sqrt{2}}{-2} = 1 + \sqrt{2}$ et $x'' = \frac{-2 + 2\sqrt{2}}{-2} = 1 - \sqrt{2}$ Donc $D_f = \left[1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}\right]$

2) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{2}$ ou $x = 1 + \sqrt{2}$ on conclut que ζ et $(O;\vec{i})$ se coupent en deux points $E\left(1 - \sqrt{2}; 0\right)$ et $F\left(1 + \sqrt{2}; 0\right)$

3) a) On a pour tout $x \in \left]1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}\right[$; $-x^2 + 2x + 1 > 0$ alors f est dérivable sur $\left]1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}\right[$ et On a :

$f'(x) = \frac{-2x + 2}{2\sqrt{-x^2 + 2x + 1}} = \frac{-x + 1}{\sqrt{-x^2 + 2x + 1}}$; $f'(0) = 1$;

$T: y = f'(0)x + f(0) = x + 1$

b) $f(0.001) = f(0 + 0.001) \simeq f(0) + f'(0)\times 0.001 \simeq 1.001$. 4)

$\Gamma = \zeta \cup S_{(O;\vec{i})}(\zeta)$

a) $M(x;y) \in \Gamma \Leftrightarrow y = \sqrt{-x^2 + 2x + 1}$ ou $y = -\sqrt{-x^2 + 2x + 1}$

$\Leftrightarrow y^2 = -x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 2$ donc (Γ) est un cercle de centre $w(1;0)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

b) On a le point $H(0;1) \in \zeta$ donc à (Γ), On construit donc le cercle de centre $w(1;0)$ et passant par H. La courbe (ζ) est le demi cercle supérieur car $f(x) \geq 0$

Exercice n°1 : 1)b , 2) b) 3) b), 4)a) π b) sin(2x) c) ***Un axe de symétrie d'équation : x=0

Exercice n°2 : 1) a) 2) c) 3) c) 4) b) 5) a)

Exercice n°3 : 1) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}-\sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2}}=-\sqrt{\frac{1}{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\frac{x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\times\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}\ \frac{1}{2}\times\frac{1}{1}=\frac{1}{2}$

3) soit la fonction $f(x)=\cos^3 x+\sin^3 x$; f est dérivable sur IR et on a :

$f'(x)=-3\sin x.\cos^2 x+3\cos x.\sin^2 x=-\frac{3}{2}\cos x\sin 2x+\frac{3}{2}\sin x\sin 2x=\frac{3}{2}\sin 2x(\sin x-\cos x)$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos^3 x+\sin^3 x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=0$

4) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\cos^3 x+\sin^3 x-1}{x-\pi}=\lim\limits_{x\to\pi}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}=f'(\pi)=0$

5) soit la fonction $f(x)=2\cos x$; f est dérivable sur IR et on a : $f'(x)=-2\sin x$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\cos x-1}{x-\frac{\pi}{3}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}=f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-2\sin\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$

6) soit la fonction $f(x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$; f est dérivable sur IR et on a : $f'(x)=-4\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)}{x-\frac{\pi}{6}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{x-\frac{\pi}{6}}=f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=-4\sin\left(2\times\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)=-4\sin\frac{\pi}{2}=-4$

7) soit la fonction $f(x)=\sqrt{2}\cos x-1$ et $g(x)=\sqrt{2}\sin x-1$; f et g sont dérivables sur IR et on a :

$f'(x)=-\sqrt{2}\sin x$ et $g'(x)=\sqrt{2}\cos x$ et on a $g'\left(\frac{\pi}{4}\right)\neq 0$;

$$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{\sqrt{2}\sin x-1}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}}{\frac{g(x)-g\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}}=\frac{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}{g'\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{-\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}}=-1$$

Exercice n°4 : 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 4x}{x}}{\frac{\sin 3x}{x}}=\frac{4}{3}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin x-\sin 2x}{2\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin x}{2\sin x}-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2\sin x}=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{(4x)^2}\times 16=\frac{1}{2}\times 16=8$;

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 5x}{2(1-\cos 5x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 5x}{2(1-\cos 5x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\cos 5x)(1+\cos 5x)}{2(1-\cos 5x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+\cos 5x}{2}=\frac{2}{2}=1$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\sin\frac{1}{x}$ (forme indéterminée $0\times\infty$); $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\sin\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$ or $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$

(On pose $\frac{1}{x}=t$) d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\sin\frac{1}{x}=+\infty$

4) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{(x-\pi)^2}=\frac{0}{0}$ forme indéterminée ; soit $t=x-\pi\Leftrightarrow x=t+\pi$ lorsque $x\to\pi$ alors $t\to 0$;

$\lim\limits_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{(x-\pi)^2}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{1+\cos(\pi+t)}{t^2}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t^2}=\frac{1}{2}$

5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x-1}{2\cos x-1}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-1}{2\cos x-1}$ soit $t=x-\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow x=t+\frac{\pi}{3}$;

$$=\lim\limits_{t\to 0}\frac{2\cos\left(2\left(t+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{3}\right)-1}{2\cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right)-1}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{2\cos\left(2\left(t+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{3}\right)-1}{2\cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right)-1}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\cos 2t-\sqrt{3}\sin 2t-1}{\cos t-\sqrt{3}\sin t-1}=$$

$$\lim\limits_{t\to 0}\frac{2\left(\frac{\cos 2t-1}{2t}\right)-2\sqrt{3}\left(\frac{\sin 2t}{2t}\right)}{\frac{\cos t-1}{t}-\frac{\sqrt{3}\sin t}{t}}=\frac{0-2\sqrt{3}}{-\sqrt{3}}=2$$

6) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x+\cos x}{x+\frac{\pi}{4}}=\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{x+\frac{\pi}{4}}$ (soit $t=\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$) $=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sqrt{2}\sin t}{t}=\sqrt{2}$

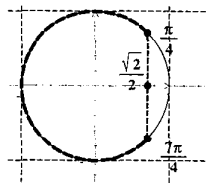
7) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan 3x.\tan 2x=\lim\limits_{t\to 0}\tan 3\left(t+\frac{\pi}{2}\right).\tan 2\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=\lim\limits_{t\to 0}\tan\left(3t+\frac{3\pi}{2}\right).\tan(2t+\pi)$

$=\lim\limits_{t\to 0}-\cot g 3t.\tan 2t=\lim\limits_{t\to 0}-\frac{\tan 2t}{\tan 3t}=-\frac{2}{3}$.

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin x(\cos 2x-\cos x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1-\cos x}{\cos x}}{(\cos x-1)(2\cos x+1)}=-\dfrac{1}{3}$

Exercice n°5 : 1) $D_f=\left\{x\in[0,2\pi]/1-\sqrt{2}\cos x\neq 0\right\}$. $1-\sqrt{2}\cos x\neq 0\Leftrightarrow \cos x\neq\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow \cos x\neq\cos\dfrac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow x\neq\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$ et $x\neq-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$ donc $\boxed{D_f=[0,2\pi]\setminus\left\{-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right\}}$.



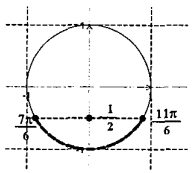
2) $1-\sqrt{2}\cos x\geq 0\Leftrightarrow \cos x\leq\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow \cos x\leq\cos\dfrac{\pi}{4}\Leftrightarrow x\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{7\pi}{4}\right]$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
$1-\sqrt{2}\cos x$		$-$	0	$+$	0	$-$	

3) $-2\sin x-1\geq 0\Leftrightarrow \sin x\leq-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \sin x\leq\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$

$\sin x=\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=\pi+\dfrac{\pi}{6}+2k\pi=\dfrac{7\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$ donc $S_{[0,2\pi]}=\left\{\dfrac{7\pi}{6},\dfrac{11\pi}{6}\right\}$

et par suite $\begin{cases}\sin x\leq\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\\ \text{et } x\in[0,2\pi]\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left[\dfrac{7\pi}{6},\dfrac{11\pi}{6}\right]$



donc $\boxed{S_{[0,2\pi]}=\left[\dfrac{7\pi}{6},\dfrac{11\pi}{6}\right]}$. $f(x)\leq 0\Leftrightarrow\dfrac{-2\sin x-1}{1-\sqrt{2}\cos x}\leq 0$.

$S_{[0,2\pi]}=\left]\dfrac{\pi}{4},\dfrac{7\pi}{6}\right]\cup\left]\dfrac{7\pi}{4},\dfrac{11\pi}{6}\right]$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{7\pi}{4}$		$\frac{11\pi}{6}$		2π
$-2\sin x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$1-\sqrt{2}\cos x$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$-$	

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^-}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^-}\dfrac{\overbrace{-2\sin x-1}^{\to-\sqrt{2}-1}}{\underbrace{1-\sqrt{2}\cos x}_{0^-}}=-\infty$

Exercice N°6: 1) $f(x)=\sin 2x$, f est définie et continue sur IR ; f est périodique et de période $T=\pi$; f est une fonction impaire ; il suffit d'étudier f sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

On désigne par Γ la courbe représentative de la

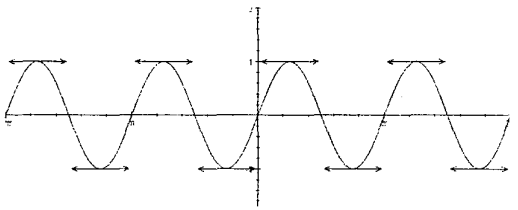
Soit $\zeta_0=\Gamma\cup\Gamma'$ la courbe représentative de la restriction de f à $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$.

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	2	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

restriction de la fonction f à $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ et par (Γ') la symétrique de Γ par rapport à l'origine du repère.

Posons ζ_K : l'image de ζ_0 par la translation de vecteur $k\pi\vec{i}$ où $k\in\mathbb{Z}$. Donc ζ est la réunion de toutes les courbes ζ_K lorsque k varie dans $\mathbb{Z}$. f est dérivable sur IR et $f'(x)=2\cos 2x$.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$f(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0



2) $g(x)=|\sin 2x|$. La courbe représentative de g est la réunion de la partie de ζ située au dessus de l'axe des abscisses et de la symétrique par rapport à l'axe des abscisses de la partie de ζ située au-dessous de l'axe des abscisses.

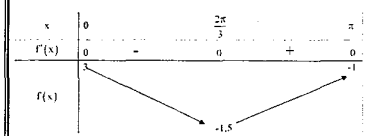
3) g est périodique et de période $T=\dfrac{\pi}{2}$

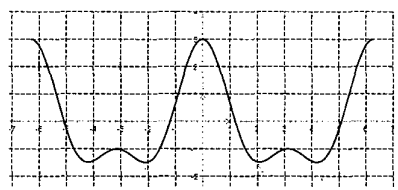
Exercice n°7 : 1) $D_f=\mathbb{R}$. Pour tout réel x, $(-x)\in\mathbb{R}$: f(-x) = 2cos(-x) + cos(-2x) = 2cos(x) + cos(2x) = f(x). Donc f est paire. Pour tout réel x, $(x+2\pi)\in\mathbb{R}$,

$f(x+2\pi)=2\cos(x+2\pi)+\cos(2(x+2\pi))=2\cos(x)+\cos(2x+4\pi)=2\cos(x)+\cos(2x)=f(x)$ donc f est périodique et de période 2π. D'où il suffit d'étudier sur $[-\pi,\pi]$, or f est paire donc $(O,\vec{i})$ est un axe de symétrie de ζ_f. Ainsi il suffit d'étudier f sur $[0,\pi]$.

2) f est dérivable sur $[0,\pi]$. $f'(x)$=-2sinx-2sin2x=-2(sinx+sin2x)=-2(sinx+2cosx.sinx) = -2 sinx (1+2cosx).

$f'(x)=0\Leftrightarrow \sin x=0$ ou $1+2\cos x=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ \text{ou}\\ x=\pi\end{cases}$ ou $\cos x=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ \text{ou}\\ x=\pi\end{cases}$ ou $x=\dfrac{2\pi}{3}$





3) f(x) = -1 sig 2cosx + cos2x = -1

sig 2cosx+ $2\cos^2(x)$-1=-1 sig 2cosx(1+cosx) = 0

sig

$\cos x = 0$ ou $\cos x = -1$ sig $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $x = \pi + 2k'\pi, k' \in \mathbb{Z}$

donc $S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ et $S_{[0,\pi]} = \left\{\frac{\pi}{2}, \pi\right\}$.

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
f(x)	3	0,5	-1	-1,5	-1

$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-3}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0)$ car f est dérivable en 0 Donc

$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-3}{x} = 0$

Exercice8 *:1)*

$f(x+2\pi) = 2\sin^2(x+2\pi) + 4\sin(x+2\pi) = 2\sin^2 x + 4\sin x = f(x)$

donc f est 2π – périodique

$f'(x) = 4\cos x \sin x + 4\cos x = 4\cos x(\sin x + 1)$

$\forall x \in [-\pi, \pi]; f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} \\ \text{ou } \sin x + 1 = 0 \Rightarrow \sin x = -1 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \end{cases}$

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		π
cos(x)		-	0	+	0	-	
sin(x) + 1		+	0	+		+	
f'(x)		-	0	+	0	-	
f(x)	0	↘	-2	↗	0	↘	0

$f(-\pi) = 2\sin^2(-\pi) + 4\sin(-\pi) = 0$

$f(-\frac{\pi}{2}) = 2\sin^2(-\frac{\pi}{2}) + 4\sin(-\frac{\pi}{2}) = 2\times(-1)^2 + 4\times(-1) = 2 - 4 = -2$

$f(\frac{\pi}{2}) = 2\sin^2(\frac{\pi}{2}) + 4\sin(\frac{\pi}{2}) = 2\times(1)^2 + 4\times 1 = 2 + 4 = 6$,

$f(\pi) = 2\sin^2(\pi) + 4\sin(\pi) = 0$

2) $f(x) = 0 \Rightarrow 2\sin^2(x) + 4\sin(x) = 0 \Rightarrow 2\sin(x)(\sin x + 2) = 0$ or

$\sin x + 2 \neq 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \zeta \cap (O, \vec{i}) = \{M_k(k\pi, 0), k \in \mathbb{Z}\}$

4)a)voir figure

$g(x) + f(x+\pi) = -2\sin^2 x + 4\sin x + 2\sin^2(x+\pi) + 4\sin(x+\pi)$

$= -2\sin^2 x + 4\sin x + 2(-\sin x)^2 - 4\sin x = -2\sin^2 x + 4\sin x + 2\sin^2 x - 4\sin x = 0$

b) $g(x) + f(x+\pi) = 0 \Rightarrow g(x) = -f(x+\pi)$. on pose $\zeta' = t_{-\pi\vec{i}}(\zeta_f)$ donc $\zeta_g = S_{(o,\vec{i})}(\zeta')$

Exercice n°9 1) Pour tout réel x de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; $0 \leq \cos^2 x \leq 1$ et $0 \leq \cos^2(3x) \leq 1$ Ainsi $0 \leq f(x) \leq 2$. Comme

$0 = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $2 = f(0)$ Alors le réel 2 est le maximum de f sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ Puisque f est continue

sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ Alors $f\left(\left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right) = [0; 2]$.

2) a) g *est continue* sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ Alors l'image de l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ est un intervalle fermé borné, c'est-à-dire, il

existe deux réels a et b tels que $g\left(\left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right) = [a; b]$ Or pour tout x de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; $g(x) \leq 2$ et $g(0) = 2$ Alors $b = 2$

Par suite $f\left(\left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right) = [a; 2]$ De plus $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{3\pi}{4} = 0$ Alors $a \leq 0$

b) $g\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \cos\frac{3\pi}{8} + \cos\frac{9\pi}{8} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(\pi + \frac{\pi}{8}\right) = \sin\frac{\pi}{8} - \cos\frac{\pi}{8}$

c) $\left[g\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right]^2 = \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8} = 1 - \sin\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$

d) Comme $\sin\frac{\pi}{8} < \cos\frac{\pi}{8}$ Alors $g\left(\frac{3\pi}{8}\right) < 0$ Par conséquent $g\left(\frac{3\pi}{8}\right) = -\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$.

Puisque $g\left(\left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right) = [a; 2]$ Alors $a \leq -\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$ de plus si $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ alors $3x \in \left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$

Par conséquent $-1 \leq g(x) \leq 2$ Ainsi $-1 \leq a$. **Conclusion** : $a \in \left[-1; -\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}\right]$

Exercice N° 10 :1) $f(x) = \sqrt{3}\sin 2x - 2\sin^2 x + 1 = \sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x$; $r = 2$;

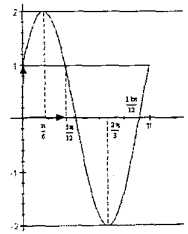
$\varphi = \frac{\pi}{3}$ d'où $f(x) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

2) $f(x) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right); D_f = \mathbb{R}$.

Période : π, Intervalle d'étude $[0; \pi]$

Pour $x \in D_f; f'(x) = -4\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$2x - \frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$		0		π		$\frac{5\pi}{3}$
f'(x)		+		−		+	
f(x)	1	↗	2	↘	−2	↗	−1



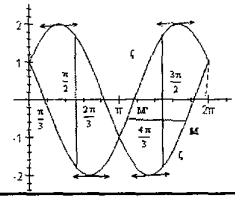
Soit ζ_0 la représentation graphique de la restriction de f à $[0; \pi]$, et ζ_k l'image de ζ_0 par la translation $t_{k\pi\vec{i}}$.

ζ est la réunion de toutes les courbes ζ_k pour $k \in \mathbb{Z}$

Exercice N° 11 :1) a)

$f(x) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right); D_f = \mathbb{R}$

; f est périodique de période 2π, intervalle



x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{4\pi}{3}$		2π
$x - \frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$		0		π		$\frac{5\pi}{3}$
f'(x)		+		−		+	
f(x)	1	↗	2	↘	−2	↗	1

d'étude $[0;2\pi]$; f est dérivable sur IR et pour $x \in IR$; $f'(x) = -2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

b) $g(x) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; $D_g = IR$; période 2π ; $g'(x) = -2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ Soit ζ_0 la courbe représentative de la restriction de f à $[0;2\pi]$ et et ζ_k l'image de ζ_0 par la translation $t_{2k\pi\vec{i}}$. ζ est la réunion de toutes les courbes ζ_k pour $k \in \mathbb{Z}$. Soit ζ_0' la courbe représentative de la restriction de f à $[0;2\pi]$ et ζ_0' l'image de ζ_0' par la translation $t_{2k\pi\vec{i}}$; ζ' est la réunion de toutes les courbes ζ_k' pour $k \in \mathbb{Z}$. Soit $M\left(x; 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right)$ un point de ζ et

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{4\pi}{3}$		2π
$x+\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$		0		2π		$\frac{7\pi}{3}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	↘	-2	↗	2	↘	1

$M'\left(x - \frac{2\pi}{3}; 2\cos\left(x - \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right)\right)$ un point de ζ'. $\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} -\frac{2\pi}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$

d'où $M' = t_{-\frac{2\pi}{3}\vec{i}}(M)$

et par suite ζ' est l'image de ζ par $t_{-\frac{2\pi}{3}\vec{i}}$

2) $h(x) = |\cos x| + \sqrt{3}|\sin x|$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\lvert\cos x\rvert$	$\cos x$	$-\cos x$	$-\cos x$	$\cos x$	
$\lvert\sin x\rvert$	$\sin x$	$\sin x$	$-\sin x$	$-\sin x$	
$h(x)$	$\cos x + \sqrt{3}\sin x$	$-\cos x + \sqrt{3}\sin x$	$-\cos x - \sqrt{3}\sin x$	$\cos x - \sqrt{3}\sin x$	
$h(x)$	$2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$	$-2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$	$-2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$	$2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$	
$h(x)$	$f(x)$	$-g(x)$	$-f(x)$	$g(x)$	

Exercice n°12 :1) On a : $\forall x \in]-\infty;0[; x^2(1-x) \neq 0$ donc f est définie sur $]-\infty;0[$

Si $x \in [0;1]$; $\pi x \in [0;\pi] \Rightarrow \sin \pi x \geq 0 \Leftrightarrow 1 + \sin \pi x > 0$ d'où $1 + \sin \pi x \neq 0 \forall x \in [0;1]$ et par suite f est définie sur $[0;1]$ Si $x \in]1;+\infty[; 1 - x \neq 0$ donc f est définie sur $]1;+\infty[$ D'où $D_f =]-\infty;0[\cup [0;1] \cup]1;+\infty[= IR$

2) $x \to \cos \pi x$ et $x \to 1 + \sin \pi x$ sont continues sur $[0;1]$ c'est-à-dire continues à droite en 0 et à gauche en 1.

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = a + 1 = f(0)$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = a - 1 = f(1)$. f est continue en 0 signifie f est continue à gauche en 0.

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-}\left[\left(\frac{1}{1-x}\right).\left(\frac{\sin x}{x} + 2.\frac{1-\cos x}{x^2}\right)\right] = \lim_{x \to 0^-}\frac{1}{1-x}.\frac{\sin x}{x} + 2\lim_{x \to 0^-}\frac{1-\cos x}{x^2} = 1 + 2 \times \frac{1}{2} = 2$$

f est continue en 0 donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \Leftrightarrow a + 1 = 2 \Leftrightarrow a = 1$.

f est continue en 1 signifie f est continue à droite et à gauche en 1. $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = a - 1$;

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-}\frac{1+\cos \pi x}{(1-x)\pi^2} + bx = \lim_{h \to 0}\frac{1+\cos \pi(1-h)}{\pi^2.h^2} + b(1-h) = \lim_{h \to 0}\frac{1-\cos \pi h}{\pi^2 h} + b\lim_{h \to 0}(1-h) = b \text{ donc}$$

$a - 1 = b$; f est continue en $1 \Leftrightarrow b = 0$.

Conclusion : f est continue en 0 et en 1 si et seulement si $\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$.

3) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\sin x - 2\cos x + 2}{x^2(1-x)} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1+\cos \pi x}{1+\sin \pi x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{1+\cos \pi x}{x^2(1-x)} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- Dérivabilité à droite en 1 : pour $x \in]1;+\infty[$ on a :

$$\lim_{h \to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^-}\frac{1+\cos(\pi(1+h))}{\pi^2 h}.\frac{1}{h} = \lim_{h \to 0}\frac{1+\cos(\pi+\pi h)}{\pi^2 h^2} = \lim_{h \to 0^-}\frac{1-\cos \pi h}{(\pi h)^2} = \frac{1}{2} \text{ Donc } f_d'(1) = \frac{1}{2}$$

- Dérivabilité à gauche en 1 : pour $x \in [0;1[$ on a :

$$\lim_{x \to 1^-}\frac{\frac{1+\cos \pi x}{1+\sin \pi x} - 0}{x-1} = \lim_{x \to 1^-}\frac{1+\cos \pi x}{x-1}.\frac{1}{1+\sin \pi x} = \lim_{h \to 0^-}\frac{1+\cos \pi(1+h)}{h} \times 1 = \lim_{h \to 0^-}\frac{1-\cos \pi h}{h} = 0 \text{ Donc } f_g'(1) = 0$$

Conclusion : $f_g'(1) = 0$ et $f_d'(1) = \frac{1}{2}$ donc f n'est pas dérivable en 1.

4) pour $x \in]0;1[$; f est dérivable. On a : $f(x) = \dfrac{1+\cos x\pi x}{1+\sin x\pi}$

$$f'(x) = \frac{-\pi\sin \pi x(1+\sin \pi x) - \pi\cos \pi x(1+\cos \pi x)}{(1+\sin \pi x)^2} = \frac{-\pi\sin \pi x - \pi\sin^2 \pi x - \pi\cos \pi x - \pi\cos^2 \pi x}{(1+\sin \pi x)^2}$$

$$= \frac{-\pi\sin x\pi - \pi\cos x\pi - \pi(\sin^2 \pi x + \cos^2 \pi x)}{(1+\sin \pi x)^2} = \frac{-\pi(1+\sin \pi x + \cos \pi x)}{(1+\sin \pi x)^2}$$

Exercice 13 :1)a) $f(x) = \sqrt{2 + \cos x + \sqrt{3}\sin x}$, $f(x) = \sqrt{2 + 2\cos(x - \frac{\pi}{3})} = \sqrt{4.\cos^2(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6})} = 2\left|\cos(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6})\right|$

b) $D_f = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}, (x + 2\pi) \in \mathbb{R}$ et on a : $f(x + 2\pi) = \sqrt{2 + \cos(x + 2\pi) + \sqrt{3}\sin(x + 2\pi)} = \sqrt{2 + \cos x + \sqrt{3}\sin x} = f(x)$

$\Rightarrow$ f est périodique et $T = 2\pi$ est une période

c) $\Delta : x = \frac{\pi}{3}$ $\quad \forall x \in IR$, $(2a - x) \in IR$ et $f(2a-x) = f(\frac{2\pi}{3} - x)$ tel que $a = \frac{\pi}{3}$

$f(2a-x) = f(\frac{2\pi}{3} - x) = 2\left|\cos(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2} - \frac{\pi}{6})\right| = 2\left|\cos(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2})\right| = f(x)$ $\Rightarrow \Delta : x = \frac{\pi}{3}$ est un axe de symétrie

Si on étudie f sur $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$, on note Γ la courbe de la restriction de f à $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$

$\Delta : x = \frac{\pi}{3}$ est un axe de symétrie donc $\Gamma \cup S_\Delta(\Gamma)$ est la courbe de restriction de f à $\left[\frac{\pi}{3} - \pi, \frac{\pi}{3} + \pi\right]$. Soit

$\zeta_1 = \Gamma \cup S_\Delta(\Gamma)$, $\quad \zeta = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} t_{k2\pi\vec{i}}(\zeta_1)$

2)a) pour $\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{6} \le \frac{x}{2} \le \frac{4\pi}{6} \Rightarrow 0 \le \frac{x}{2} - \frac{\pi}{6} \le \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \cos(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}) \ge 0 \Leftrightarrow f(x) = 2\cos(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6})$

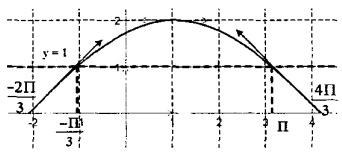
$\forall x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]; f'(x) = -\sin(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}) \Rightarrow f'(\frac{\pi}{3}) = 0$; $f'(\frac{4\pi}{3}) = -1$

x	$\frac{\pi}{3}$		$\frac{4\pi}{3}$
f'(x)		-	
f(x)	2	↘	0

b) la demi tangente au point d'abscisse $\frac{\pi}{3}$ est: $y = 2$ et $x \ge \frac{\pi}{3}$

La demi tangente au point d'abscisse $\frac{4\pi}{3}$ est

d'équation: $\begin{cases} y = -(x - \frac{4\pi}{3}) \\ x \le \frac{4\pi}{3} \end{cases}$



3)a) $f(x) = 1 \Leftrightarrow \left|\cos(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6})\right| = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2} \\ \text{ou} \\ \cos(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \frac{x}{2} - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \frac{x}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \frac{x}{2} - \frac{\pi}{6} = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} ;(k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow \begin{cases} x = \pi + k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{3} + 4k\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{5\pi}{3} + 4k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\pi + 4k\pi \end{cases} ;(k \in \mathbb{Z})$

Dans $\left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$: $S = \left\{\pi, -\frac{\pi}{3}\right\}$

b) $1 + \cos x + \sqrt{3}\sin x < 0 \Leftrightarrow 2 + \cos x + \sqrt{3}\sin x < 1 \Leftrightarrow \sqrt{2 + \cos x + \sqrt{3}\sin x} < 1 \Leftrightarrow f(x) < 1$ donc

$\boxed{S_{\left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right]} = \left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{-\pi}{3}\right] \cup \left[\pi; \frac{4\pi}{3}\right]}$ (voir figure).

Exercice n°14 : 1) a)

$f(x) = \cos x - \sin x = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x - \sin\frac{\pi}{4}\sin x\right)$ donc $f(x) = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

b) $D_f = \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \in \mathbb{R}$ et on a :

$f\left(2 \times \frac{\pi}{4} - x\right) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x + \cos x = -f(x) = 2 \times 0 - f(x)$ donc le point I

est un centre de symétrie pour ζ_f

c) On a $x \in \mathbb{R} \Rightarrow (x + 2\pi) \in \mathbb{R}$ et $f(x + 2\pi) = \cos(x + 2\pi) - \sin(x + 2\pi) = \cos x - \sin x = f(x)$ alors l'étude de

f se réduit sur $\left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$.or on a I est un centre de symétrie

pour ζ_f donc l'étude est réduite sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$

x	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$
f'(x)		-	0	+	
f(x)	0	↘	$-\sqrt{2}$	↗	0

d) f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$f'(x) = -\sin x - \cos x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\sin x$ or $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$ donc $x = \frac{3\pi}{4}$.

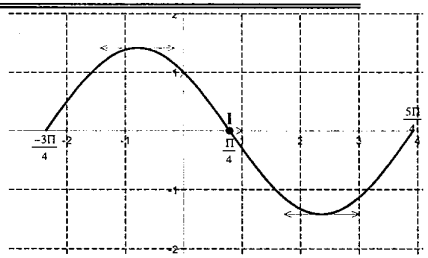
$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$, $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

$= -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$ et $f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$

e)

x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$
f(x)	0	-1	$-\sqrt{2}$	-1	0

$\zeta_f \cap (O,\vec{i}) = \left\{A\left(-\frac{3\pi}{4},0\right);B\left(\frac{5\pi}{4},0\right);I\left(\frac{\pi}{4},0\right)\right\}$



f) Pour tout réel $x \in \left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$, on a $f(x) \le 0$.

2) a) $D_g = \{x \in \mathbb{R} / \cos x + \sin x \neq 0\}$.

$\cos x + \sin x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right) = 0$

$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ donc $D_g = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

b) $x \in D_g \Leftrightarrow x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow -x \neq -\frac{3\pi}{4} - k\pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - x \neq \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{4} - k\pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - x \neq -\frac{\pi}{4} - k\pi$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi - k'\pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - x \neq \frac{3\pi}{4} + k''\pi \Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \in D_g$ et on a :

$$g\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sin\left(2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin x\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{\sin(\pi - 2x)}{\sin x + \cos x} = \frac{\sin 2x}{\cos x + \sin x} = g(x).$$

c) $x \in D_g \Leftrightarrow x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x + 2\pi \neq \frac{3\pi}{4} + 2\pi + k\pi \Leftrightarrow x + 2\pi \neq \frac{3\pi}{4} + k'''\pi \Leftrightarrow (x + 2\pi) \in D_g$ et on a :

$g(x + 2\pi) = \frac{\sin(2(x + 2\pi))}{\cos(x + 2\pi) + \sin x(x + 2\pi)} = \frac{\sin(2x + 4\pi)}{\cos x + \sin x} = \frac{\sin 2x}{\cos x + \sin x} = g(x)$ donc g est 2π – périodique

donc l'étude de g se réduit à $\left[-\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right] \cap D_g$ or on a $g\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = g(x)$ donc la droite $\Delta : x = \frac{\pi}{4}$ est un axe de symétrie de ζ_f donc on peut réduite l'étude de f sur $\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right] \cap D_g$.

d) $g(x) = \frac{\sin 2x}{\cos x + \sin x} = \frac{2\sin x\cos x}{\cos x + \sin x} = \frac{2\sin x\cos x + 1 - 1}{\cos x + \sin x} = \frac{(2\sin x\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x) - 1}{\cos x + \sin x}$

$= \frac{(\cos x + \sin x)^2}{\cos x + \sin x} - \frac{1}{\cos x - \sin x} = \cos x + \sin x - \frac{1}{\cos x - \sin x}$

e) $g'(x) = -\sin x + \cos x + \frac{-\sin x + \cos x}{\cos x + \sin x} = f(x) + \frac{f(x)}{(\cos x + \sin x)^2} = f(x)\left[1 + \frac{1}{(\cos x + \sin x)^2}\right]$

$= f(x)\left[\frac{(\cos x + \sin x)^2}{(\cos x + \sin x)^2} + \frac{1}{(\cos x + \sin x)^2}\right] = f(x)\left[\frac{\cos^2 x + \sin^2 x + 2\cos x\sin x + 1}{(\cos x + \sin x)^2}\right]$

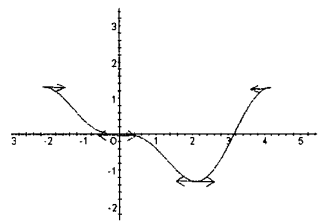
$= f(x)\left[\frac{2 + \sin 2x}{(\cos x + \sin x)^2}\right]$.

x	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$
$g'(x)$	0	-	‖	-	
$g(x)$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

f) $g'(x) = f(x)\left[1 + \frac{1}{(\cos x + \sin x)^2}\right], \forall x \in D_g$ donc le signe de $g'(x)$ est celui de f(x) car $1 + \frac{1}{(\cos x + \sin x)^2}, \forall x \in D_g$ or $\forall x \in \left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right] : f(x) \le 0$ d'où :

Exercice n°15 :1) $2x^2 - x - 1 = 0$ on a $a + b + c = 2 - 1 - 1 = 0$ donc $x' = 1$ et $x'' = -\frac{1}{2}$ Ainsi

$2x^2 - x - 1 = 2(x - 1)\left(x + \frac{1}{2}\right) = (x - 1)(2x + 1)$



2) $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1$ ou $\cos x = -\frac{1}{2}$ Si

$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ dans $\left[-\frac{2\pi}{3};\frac{4\pi}{3}\right]$

si $\cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$; $k \in \mathbb{Z}$ d'où

$S_{\left[\frac{2\pi}{3};\frac{4\pi}{3}\right]} = \left\{0;-\frac{2\pi}{3};\frac{2\pi}{3};\frac{4\pi}{3}\right\}$

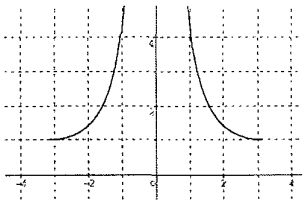
3) f est dérivable sur $\left[-\frac{2\pi}{3};\frac{4\pi}{3}\right]$ $f'(x) = \cos 2x - \cos x$ or $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow f'(x) = 2\cos^2 x - \cos x - 1$

$= (2\cos x + 1)(\cos x - 1)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -\frac{2\pi}{3}$ ou $x = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = \frac{4\pi}{3}$; $f'(x) = (\cos x - 1)(2\cos x + 1)$

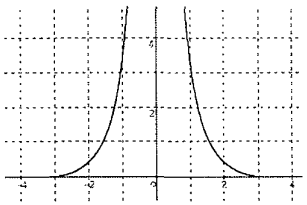
Exercice n°16 : 1) soit $x\in[-\pi;\pi]\setminus\{0\}\Rightarrow -x\in[-\pi;\pi]\setminus\{0\}$;

$f(-x)=\dfrac{2}{1-\cos(-x)}=\dfrac{2}{1-\cos x}=f(x)$ (On a : $\cos(-x)=\cos x$ et par suite f est paire.



2) $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2}{1-\cos x}=\dfrac{2}{0^+}=+\infty$ la droite d'équation $x=0$ est une asymptote verticale à ζ

3) a) On a $1-\cos x$ dérivable sur $]0;\pi]$ et $\forall x\in\,]0;\pi];1-\cos x\neq0$ donc $\dfrac{2}{1-\cos x}$ est dérivable sur $]0;\pi]$; $f'(x)=\dfrac{0\times(1-\cos x)-2\sin x}{(1-\cos x)^2}=\dfrac{-2\sin x}{(1-\cos x)^2}$



b) $f'(x)=0$ sur $]0;\pi]\Leftrightarrow\sin x=0\Leftrightarrow x=\pi$

	0		π
$\sin x$		+	
$f'(x)$		−	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1

4) Remarque : f est paire donc ζ est symétrique par rapport à $(O,\vec{j})$

5) a) $g(x)=\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}=\dfrac{2+\cos x-1}{1-\cos x}=\dfrac{2}{1-\cos x}+\dfrac{\cos x-1}{1-\cos x}=\dfrac{2}{1-\cos x}-\dfrac{1-\cos x}{1-\cos x}=f(x)-1$

b) la courbe de g est l'image de la courbe de f par la translation de vecteur $-\vec{j}$

Exercice n°17 1) $\forall x\in$ IR On a : $f(x)=-\sin^2x+\sqrt{3}\cos2x+\sqrt{3}=2\left(-\dfrac{1}{2}\sin2x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos2x\right)+\sqrt{3}$

$=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos2x-\dfrac{1}{2}\sin2x\right)+\sqrt{3}=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}\cos2x-\sin\dfrac{\pi}{6}\sin2x\right)+\sqrt{3}=2\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}$

2) f est dérivable sur IR et $\forall x\in$ IR on a $f'(x)=-4\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$

3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-\sqrt{3}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=-4\sin\dfrac{\pi}{6}=-2$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)}{x-\frac{\pi}{6}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{x-\frac{\pi}{6}}=f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=-4\sin\dfrac{\pi}{2}=-4$

$\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}\dfrac{2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}}{2x+\pi}=\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}\dfrac{f(x)-f\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{2\left(x-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)}=\dfrac{1}{2}f'\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\left(-4\sin\left(-\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$

$=-2\sin\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)=2\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)=2\times\dfrac{1}{2}=1$

4) $f'(x)=-4\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$; $f'(x)=0\Leftrightarrow-4\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)=0$

	0		$\frac{5\pi}{12}$		$\frac{11\pi}{12}$		π
$2x+\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$		π				
$f'(x)$		−	0	+	0	−	
$f(x)$	$2\sqrt{3}$	↘	$-2+\sqrt{3}$	↗	$2+\sqrt{3}$	↘	$2\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow2x+\dfrac{\pi}{6}=k\pi;k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{2};k\in\mathbb{Z}$ or $x\in[0;\pi]$

donc $0\le-\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{2}\le\pi\Leftrightarrow\dfrac{1}{12}\le\dfrac{k}{2}\le\dfrac{13}{12}\Leftrightarrow\dfrac{2}{12}\le k\le\dfrac{26}{12}$

donc $k=1$ ou $k=2$ Pour $k=1$; $x=\dfrac{5\pi}{12}$ et Pour $k=2$; $x=\dfrac{11\pi}{12}$

5) $g(x)=\dfrac{1+2\cos2x}{2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}}$; $L(x)=1+2\cos2x$ est dérivable sur $[0;\pi]$ et on a $L'(x)=-4\sin2x$;

$L\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=1+2\cos\dfrac{2\pi}{3}=1-1=0$; $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=2\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}=2\cos\dfrac{5\pi}{6}+\sqrt{3}=-\sqrt{3}+\sqrt{3}=0$ donc

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}g(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\dfrac{L(x)-L\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}}{\dfrac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}}=\dfrac{L'\left(\frac{\pi}{3}\right)}{f'\left(\frac{\pi}{3}\right)}$; $L'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-4\sin\dfrac{2\pi}{3}=-2\sqrt{3}$ et $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-4\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6}\right)=-2$

d'où $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}g(x)=\dfrac{-2\sqrt{3}}{-2}=\sqrt{3}$

Exercice n°18 1)la fonction $x\to x\sin x+\cos x-1$ est dérivable sur IR,

en particulier sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Pour tout $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

On a $f'(x)=\sin x+x\cos x-\sin x-0=x\cos x$

2) $f'(x)=0\Leftrightarrow x=0;x=-\frac{\pi}{2}$ ou $x=\frac{\pi}{2}$

3) a)d'après le tableau de variation de f 0 est un minimum absolu de f sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ donc $\forall x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ on a $f(x)\geq 0$

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	0	$+$		$+$	0
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{\pi}{2}-1$	↘	0	↗	$\frac{\pi}{2}-1$

b) puisque $f(x)\geq 0\Leftrightarrow x\sin x+\cos x-1\geq 0\Leftrightarrow x\sin x\geq 1-\cos x$

4) a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0=g(0)$ donc g est continue en 0.

b) la fonction g est continue sur $\left[-\frac{\pi}{2};0\right[$ et sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$ alors g est continue sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

c) pour $x\neq 0$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ donc g est dérivable en 0 et $g'(0)=\frac{1}{2}$

d) $g'(x)=\frac{x(\sin x)-(1-\cos x)}{x^2}=\frac{x\sin x+\cos x-1}{x^2}=\frac{f(x)}{x^2}$.

Puisque $f(x)\geq 0\ \forall x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ alors $g'(x)\geq 0\forall x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\setminus\{0\}$

	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$g'(x)$		$+$	$\frac{1}{2}$	$+$	
$g(x)$	$-\frac{2}{\pi}$	↗	0	↗	$\frac{2}{\pi}$

e) Si $x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$ on a $g(x)\leq g\left(\frac{\pi}{2}\right)$ car g est croissante donc

$\frac{1-\cos x}{x}\leq\frac{2}{\pi}\Leftrightarrow 1-\cos x\leq\frac{2x}{\pi}\Leftrightarrow -\cos x\leq\frac{2x}{\pi}-1$

$\Leftrightarrow\cos x\geq 1-\frac{2x}{\pi}$. Pour $x=0$ on a $\cos 0\geq 1-\frac{2\times 0}{\pi}$ donc $\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

on a $\cos x\geq 1-\frac{2x}{\pi}$

Exercice n°19 1) On a f est périodique de période $\frac{2\pi}{2}=\pi$;

f est dérivable sur $[0;\pi[$ et pour tout $x\in[0;\pi[$ on a : $f'(x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$

2) Soit C_1 la partie de la courbe de f sur $[0;\pi]$. $\zeta_f=t_{k\pi\vec{i}}(C_1);k\in\mathbb{Z}$

CONSTRUIRE LA COURBE

3) si $x\in[-\pi;\pi]$ alors $-x\in[-\pi;\pi]$; $g(-x)=g(x)$ alors g est paire.

Si $x\in[0;\pi]$; $g(x)=-\sin\left(2|x|+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$ car $x\in[0;\pi]$ signifie $g(x)=-f(x)$.

Soit C_1' la partie de la partie de la courbe de g sur $[0;\pi]$ donc $C_1'=S_{(0;\vec{i})}(C_1)$ ainsi $\zeta_g=C_1'\cup S_{(0;\vec{i})}(C_1')$

Exercice n°20 1) On a $D_f=\mathbb{R}$; pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a : $2\times\left(-\frac{\pi}{2}\right)-x=-\pi-x\in\mathbb{R}$

$f(-\pi-x)=2\cos\left(\frac{1}{2}(-\pi-x)+\frac{\pi}{4}\right)=2\cos\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)=2\cos\left(-\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)$ Donc la droite $D:x=-\frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie à la courbe de f.

2) pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a : $2\times\left(\frac{\pi}{2}\right)-x=\pi-x\in\mathbb{R}$ $f(\pi-x)=2\cos\left(\frac{1}{2}(\pi-x)+\frac{\pi}{4}\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)$

$=2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)\right)=2\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)=2\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)=-2\cos\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)=-f(x)=2\times 0-f(x)$.

Donc $E\left(\frac{\pi}{2};0\right)$ est un centre de symétrie à la courbe de f.

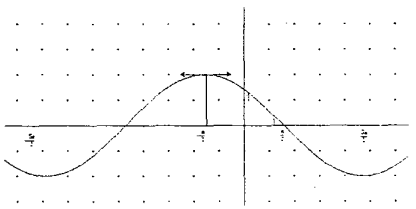
3) On a f est périodique de période $T=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$; puisque $D:x=-\frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie, on peut se limiter à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ or $E\left(\frac{\pi}{2};0\right)$ est un centre de symétrie donc on va étudier f sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ Pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a :

	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	$-$	
$f(x)$	2	↘	0

$f'(x)=-2\times\left(\frac{1}{2}\right)\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)$. On a $-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow 0\leq\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}\leq\frac{\pi}{2}\Rightarrow f'(x)\leq 0$

$\forall x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$; $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=2$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

Au point $A\left(-\frac{\pi}{2};2\right)$ on a une demi-tangente horizontale. La courbe de f sera l'image de C_0 par la translation de vecteur $4\pi k\vec{i}$



EXERCICE 1:1) a) $U_0=-1$; $U_1-U_0=1 \Leftrightarrow U_1=1+U_0=0$; $U_2-U_1=2 \Leftrightarrow U_2=2+U_1=2$

b) $U_0+U_2=1$ et $2U_1=0$; on a $U_0+U_2 \neq 2U_1$ donc (U_n) n'est pas arithmétique.

2) a) $V_n=U_{n+1}-U_n=n+1$; $V_{n+1}-V_n=1 \Rightarrow (V_n)$ est arithmétique de premier terme $V_0=1$ et de raison $r=1$

b) $S_n=V_0+V_1+.....+V_n=\frac{(n+1)(V_0+V_n)}{2}=\frac{(n+1)(1+n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

3) $S_n=V_0+V_1+.....+V_n=(U_1-U_0)+(U_2-U_1)+.....+(U_{n+1}-U_n)=U_{n+1}-U_0=U_{n+1}+1$

4) On a : $1+U_{n+1}=\frac{(n+1)(n+2)}{2} \Leftrightarrow U_{n+1}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1$ et par suite $U_n=\frac{n(n+1)}{2}-1$.

EXERCICE 2 :1) $V_n=U_{n+1}-U_n \Leftrightarrow V_{n+1}=U_{n+2}-U_{n+1}=2U_{n+1}-2U_n=2(U_{n+1}-U_n)=2V_n$

Donc (V_n) est géométrique de raison $q=2$

2) $V_n=V_0.q^n$; $V_0=U_1-U_0=1$ donc $V_n=2^n$. 3) $S_n=\sum_{k=0}^{n-1}V_k=V_0\frac{1-q^n}{1-q}=1\frac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$

4) $S_n=\sum_{k=0}^{n-1}V_k=(U_1-U_0)+(U_2-U_1)+.....+(U_n-U_{n-1})=U_n-U_0 \Leftrightarrow 2^n-1=U_n-1$ donc $U_n=2^n$

EXERCICE 3 :1) $\sum_{k=0}^{n-1}(U_{k+1}-U_K)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2^k}+k\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}+\sum_{k=0}^{n-1}k$ or $\frac{1}{2^n}$ est le terme général d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{1}{2}$ donc $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}=1\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$ et

$\sum_{k=0}^{n-1}k=1+2+3+...+(n-1)=\frac{n(n+1)}{2}$ d'où $\sum_{k=0}^{n-1}(U_{k+1}-U_K)=2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+\frac{n(n-1)}{2}=2-\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{n(n-1)}{2}$

2) On a $\sum_{k=0}^{n-1}(U_{k+1}-U_K)=(U_1-U_0)+(U_2-U_1)+...+(U_n-U_{n-1})=U_1-U_0+U_2-U_1+.....+U_n-U_{n-1}$

$=U_n-U_0=2-\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{n(n-1)}{2} \Leftrightarrow U_n-3=2-\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{n(n-1)}{2} \Leftrightarrow U_n=5-\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{n(n-1)}{2}$

EXERCICE 4:1) soit $k \in IN^*$; $\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}=\frac{(k+1)^2-k^2}{k^2(k+1)^2}=\frac{k^2+2k+1-k^2}{k^2(k+1)^2}=\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$

2) $k \in IN^*$; $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}=\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}\right)+.....+\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=1-\frac{1}{(n+1)^2}$

$=\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}=\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$.

Exercice 5 :1) $V_{n+1}=X^{n+1}=X.X^n=X.V_n$ donc (V_n) est une suite géométrique de raison X.

2) $S_n=\sum_{k=0}^{n-1}V_k=1+X+X^2+.....+X^n=\frac{1-X^{n+1}}{1-X}$

3) D'après 2) On a $X^{n+1}-1=(X-1)(1+X+X^2+.....+X^n)$; On prend $X=2$, On obtient

$2^{n+1}-1=1+2+2^2+....+2^n \Leftrightarrow 2^{n+1}=2+2+2^2+.....+2^n$

$\Leftrightarrow 2^n\times 2=2+2(1+2+.....+2^{n-1}) \Leftrightarrow 2^n=1+(2^0+2^2+.....+2^{n-1})$.

Soit $S'=2^0+2^2+.....+2^{n-1}$ on remarque que cette somme comporte n termes tous supérieurs ou égal à 1 donc $S' \geq n$ et par suite $2^n \geq 1+n$

Exercice 6:1)Voici la liste des premiers nombres obtenus en partant de 2 332 011

1	2	3	4	5	6
2 332 011	28	68	100	1	1

La suite obtenue est stationnaire à partir du rang 5, et tous les nombres suivants sont égaux à 1. Si le premier nombre est 2 332 011, le 2011ème nombre de la suite est 1.

2)Si le nombre de départ est 1 248, la liste des premiers nombres obtenus est

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1248	85	89	145	42	20	4	16	37	58	89	145	42
		1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*1*	*2*	...

On observe qu'à partir du rang 3, une série de 8 nombres se répètera. 2011= 2 + 250×8 + 1.
Ainsi, le 2011ème nombre de la suite sera le 1 nombre de la série de nombres répétée.
Le 2011ème nombre de la suite est 89.

EXERCICE 7 :1) $U_1=1$; $U_2=\frac{5}{4}$ et $U_3=\frac{49}{36}$

2) a) $\frac{1}{k^2}-\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=\frac{k-1-k^2+k^2-k}{k^2(k-1)}=\frac{-1}{k^2(k-1)}<0$ car $k>0$ donc $\frac{1}{k^2}\leq\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$

b) Pour $n=1$, on a $U_1=1\leq 2-\frac{1}{1}$. soit $p \in IN$, supposons que $U_p\leq 2-\frac{1}{p}$ et montrons que $U_{p+1}\leq 2-\frac{1}{p+1}$.

On a $U_{p+1}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+.....+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{(p+1)^2}=U_p+\frac{1}{(p+1)^2}$ d'après a) on a : $\frac{1}{(p+1)^2}\leq\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}$ et $U_p\leq 2-\frac{1}{p}$

Donc $U_{p+1}\leq 2-\frac{1}{p}+\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1} \Leftrightarrow U_{p+1}\leq 2-\frac{1}{p+1}$. Conclusion : $\forall n \in IN$; On a $U_n\leq 2-\frac{1}{n}$

EXERCICE8 :1) $S_n=\sum_{k=1}^{n}U_k=U_1+U_2+.....+U_{n-1}+U_n$;

$S_{n+1}=\sum_{k=1}^{n}U_k=U_1+U_2+.....+U_{n-1}+U_n+U_{n+1}$; $\Leftrightarrow U_{n+1}=S_{n+1}-S_n=2(n+1)^2+(n+1)-(2n^2+n)$

$=4n+3$ d'où pour tout $n \in IN^*$; On a $U_n=4(n-1)+3=4n-1$

2) pour tout $n \in IN$; $U_{n+1}=4n+3$; $U_{n+1}-U_n=4n+3-4n+1=4$ d'où $(U_n)_{n\in IN^*}$ est une suite arithmétique de raison $r=4$.

3) $V_{n+1}=\dfrac{V_n}{\sqrt{1+4V_n^2}}$; $n\in IN^*$; $V_1=\dfrac{1}{2}$

a) On a : $V_1=\dfrac{1}{2}>0$, soit $p\in IN$, supposons que $V_p>0$ et montrons que $V_{p+1}>0$. On a $V_p>0$

$\Leftrightarrow \sqrt{1+4V_p^2}>0$ donc $\dfrac{V_p}{\sqrt{1+4V_p^2}}>0$ d'où $V_{p+1}>0$. Conclusion : $\forall n\in IN^*$; on a : $V_n>0$

b) $V_1=\dfrac{1}{2}\Rightarrow V_1^2=\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{1+U_1}$ soit $p\in IN$, supposons que $V_p^2=\dfrac{1}{1+U_p}$ et montrons que $V_{p+1}^2=\dfrac{1}{1+U_{p+1}}$. On a

$$V_{p+1}^2=\frac{V_p^2}{1+4V_p^2}=\frac{\frac{1}{1+U_p}}{1+\frac{4}{1+U_p}}=\frac{1}{U_p+5}=\frac{1}{1+U_p+4} \text{ or } U_p+4=U_{p+1} \text{ d'où } V_{p+1}^2=\frac{1}{1+U_{p+1}}.$$

Conclusion : $\forall n\in IN^*$; on a : $V_n^2=\dfrac{1}{1+U_n}$

c) On a : $U_n=4n-1$ d'où $V_n^2=\dfrac{1}{4n}\Leftrightarrow V_n=\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ car $V_n>0$

EXERCICE 9 : 1)Pour $n=0$ On a $U_0=1$; $0<U_0<2$. Soit $p\in IN$, supposons que $0<U_p<2$ et montrons que $0<U_{p+1}<2$. On a $0<U_p<2\Leftrightarrow 2<U_p+2<4$ d'où

$\sqrt{2}<\sqrt{U_p+2}<2\Leftrightarrow 0<\sqrt{U_p+2}<2\Leftrightarrow 0<U_{p+1}<2$

Conclusion : d'après le principe de raisonnement par récurrence On a $\forall n\in IN$; $0<U_n<2$

2)a) $2-U_{n+1}=2-\sqrt{U_n+2}=\dfrac{4-(U_n+2)}{2+\sqrt{U_n+2}}=\dfrac{2-U_n}{2+\sqrt{U_n+2}}$,

puisque $2+\sqrt{U_n+2}>2$ signifie $\dfrac{1}{2+\sqrt{U_n+2}}<\dfrac{1}{2}$ et par suite $2-U_n<\dfrac{2-U_n}{2}=\dfrac{1}{2}(2-U_n)$

b)Pour $n=0$ on a $2-U_0=2-1=1$ donc $0<2-U_0\le\dfrac{1}{2^0}=1$. Soit $p\in IN$, supposons que $2-U_p\le\left(\dfrac{1}{2}\right)^p$ et montrons que $2-U_{p+1}\le\left(\dfrac{1}{2}\right)^{p+1}$. On a d'après a) $2-U_{p+1}\le\dfrac{1}{2}(2-U_p)\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^p$ donc $2-U_{p+1}\le\left(\dfrac{1}{2}\right)^{p+1}$.

Conclusion : d'après le principe de raisonnement par récurrence on a $\forall n\in IN; 0<2-U_{p+1}\le\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

3)a)On a : $U_0=1=2\times\cos\dfrac{\pi}{3.2^0}$. soit $p\in IN$, supposons que $U_p=2\cos\dfrac{\pi}{3.2^p}$ et montrons que $U_{p+1}=2\cos\dfrac{\pi}{3.2^{p+1}}$.

$$U_{p+1}=\sqrt{U_p+2}=\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{3.2^p}}=\sqrt{2\left(1+\cos\frac{\pi}{3.2^p}\right)}=\sqrt{2\left(1+\cos.2\frac{\pi}{3.2^{p+1}}\right)}=\sqrt{4\cos^2\left(\frac{\pi}{3.2^{p+1}}\right)}$$

$=2\cos\dfrac{\pi}{3.2^{p+1}}$. Conclusion : $\forall n\in IN; U_n=2\cos\dfrac{\pi}{3.2^n}$

b)pour $n=2; U_2=2\cos\dfrac{\pi}{12}\Leftrightarrow\cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{U_2}{2}$. On a $U_1=\sqrt{2+U_0}=\sqrt{3}$;

$U_2=\sqrt{2+\sqrt{3}}\Rightarrow\cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

Exercice 10 : 1) f est dérivable sur IR^* en particulier sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel $x>0$; $f'(x)=\dfrac{1}{3}+\dfrac{3}{x^2}>0$

x	0		$+\infty$
f'(x)	‖	+	
f(x)	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

2) Pour tout $n\ge1$ on a : $n\le n+1\Leftrightarrow f(n)\le f(n+1)\Leftrightarrow U_n\le U_{n+1}$ et par suite (U_n) est croissante

3) a) g est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel $x>0$; $g'(x)=x-3$

b) d'après le tableau de variations On a : $f(0)\ge f(1)\ge f(2)\ge f(3)$

$V_0\ge V_1\ge V_2\ge V_3$ d'autre part sur $[3;+\infty[$ on a : $n\le n+1$ et $g(n)\le g(n+1)$

$\Leftrightarrow V_n\le V_{n+1}$. Donc (V_n) n'est pas monotone mais elle est croissante à partir du rang $n=3$.

x	0		3		$+\infty$
g'(x)	‖	−		+	
g(x)	‖ 1	↘	$-\frac{7}{2}$	↗	$+\infty$

Exercice 11 : 1) $U_0=1=\dfrac{0+1}{3^0}$ vrai. Soit $n\in\mathbb{N}$ supposons que $U_n=\dfrac{n+1}{3^n}$ et montrer que $U_{n+1}=\dfrac{(n+1)+1}{3^{n+1}}$ or $U_{n+1}=\dfrac{2}{3}U_n-\dfrac{n}{3^{n+1}}=\dfrac{2}{3}.\dfrac{n+1}{3^n}-\dfrac{n}{3^{n+1}}=\dfrac{2n+2-n}{3^{n+1}}=\dfrac{n+2}{3^{n+1}}=\dfrac{(n+1)+1}{3^{n+1}}$.

Conclusion : pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a : $U_n=\dfrac{n+1}{3^n}$.

b) $U_{n+1}-U_n=\dfrac{n+2}{3^{n+1}}-\dfrac{n+1}{3^n}=\dfrac{n+2-3n-3}{3^{n+1}}=\dfrac{-2n-1}{3^{n+1}}=-\dfrac{2n+1}{3^{n+1}}\le0\Rightarrow(U_n)$ est une suite décroissante pour $n\in\mathbb{N}$

2) $S_n=\sum_{k=0}^{k=n-1}U_k$, $n\in\mathbb{N}$. Montrer par récurrence que $S_n=\dfrac{9}{4}-\dfrac{2n+3}{4\times3^{n-1}}$. $S_1=U_0=1$, $\dfrac{9}{4}-\dfrac{2n+3}{4\times3^{n-1}}=1$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ supposons que $S_n=\dfrac{9}{4}-\dfrac{2n+3}{4\times3^{n-1}}$ et montrer que $S_{n+1}\dfrac{9}{4}-\dfrac{2(n+1)+3}{4\times3^n}=\dfrac{9}{4}-\dfrac{2n+5}{4\times3^n}$.

$S_{n+1}=S_n+U_n=\dfrac{9}{4}-\dfrac{2n+3}{4\times3^{n-1}}+\dfrac{n+1}{3^n}=\dfrac{9}{4}+\dfrac{-3(2n+3)+4(n+1)}{4\times3^n}=\dfrac{9}{4}+\dfrac{-2n-5}{4\times3^n}$.

Conclusion : $n\in\mathbb{N}^*$; $S_n=\dfrac{9}{4}-\dfrac{2n+3}{4\times3^{n-1}}$. Vérifier que $S_n=\dfrac{9}{4}-\dfrac{3}{2}U_n-\dfrac{1}{4\times3^{n-1}}$. On sait que : $S_n=\dfrac{9}{4}-\dfrac{2n+3}{4\times3^{n-1}}=\dfrac{9}{4}-\dfrac{2n+2+1}{4\times3^{n-1}}=\dfrac{9}{4}-\dfrac{2(n+1)}{4\times3^{n-1}}-\dfrac{1}{4\times3^{n-1}}$.

$S_n = \frac{9}{4} - \frac{3(n+1)}{2\times 3^n} - \frac{1}{4\times 3^{n-1}} = \frac{9}{4} - \frac{3}{2}\left(\frac{n+1}{3^n}\right) - \frac{1}{4\times 3^{n-1}} = \frac{9}{4} - \frac{3}{2}U_n - \frac{1}{4\times 3^{n-1}}$

EXERCICE 12 : 1)La nème ligne comporte 2n-1 termes.
Le dernier élément de la nème ligne est n^2 en effet, c'est exact pour n=1 et si c'est exact pour n, la (n+1)ème ligne comporte 2(n+1)-1=2n+1 de n^2+1 à $n^2+2n+1=(n+1)^2$. L'entier écrit au bout de la 18ème ligne est donc 182324.
2) On a la double inégalité : $44^2 < 1936 < 2010 < 2025\ 45^2$
2010 est donc écrit sur la 45ème ligne de premier terme 1937.
De 2010 =1936 +74 on déduit que 2010 est le 74ème terme de la 45ème ligne.

EXERCICE 13: Le "compris entre" de l'énoncé doit être...compris au sens large, c'est-à-dire les âges des 26 personnes sont chacun des entiers allant de 35 (compris) à 60 (compris), ce qui fait bien 60-34=26 entiers.Considérons la personné âgée de 60 ans et celle à sa droite ; reste 24 personnes que l'on peut partager en 6 groupes de 4 personnes assises côte à côte.
Si aucun groupe de 4 personnes assises côte à côte n'avait pas une somme des âges ≤190, c'est que tout groupe de 4 personnes assises côte à côte aurait une somme des âges ≤190 et la somme des âges des 26 personnes serait >60+35+6×190=1235; mais en fait la somme des âges des 26 personnes est 35+36+...+60=26×(35+60)/2=1235 (voir suites arithmétiques) et comme 1235 n'est pas supérieur strictement à 1235 il y a contradiction. Il est donc impossible qu'aucun groupe de 4 personnes assises côte à côte n'ait une somme des âges ≤190, c'est-à-dire il existe effectivement au moins un groupe de 4 personnes assises côte à côte dont la somme des âges est ≤190.

EXERCICE 14 : 1) Raisonnons en termes de restes :
le 1er reste est R_1=200 : Abrar n'a pas encore commencé à boire
le 2ième reste est $R_2=R_1(1-1/100)$: Abrar commence par boire le 1/100 de la tasse
le 3ième reste est $R_3=R_2(1-1/99)$: Abrar boit le 1/99 de ce qu'il reste
etc le kième reste est $R_k=R_{k-1}(1-1/(100-(k-2))$, pour k≥2 ; k-1+100-(k-2)=101
et comme elle continue cette façon de boire jusqu'à boire la moitié de ce qui reste, le dernier reste va correspondre à k tel que 100-(k-2)=2, soit k=100.
le 100ième et dernier reste est $R_{100}=R_{99}(1-1/2)$.
La quantité totale bue est évidemment 200-R_{100} ; pour obtenir R_{100}, on multiplie membres à membres les 100 égalités ci-dessus, et par simplification par R_1, R_2, ... , R_{99}, on obtient
R_{100}=200(1-1/100)(1-1/99)(1-1/98).....(1-1/3)(1-1/2)
R_{100}=200×99/100×98/99×97/98× ... ×2/3×1/2
R_{100}=200/100=2 et donc Abrar **a bu aujourd'hui 200-2=198mL**
Remarque : Abrar a bu son café en 99 fois (à l'issue des desquelles les restes sont successivement R_2, R_3, ... R_{100}) : en fait **à chaque fois,** Abrar **a bu 2mL** :
en multipliant membres à membres les égalités donnant R_1, R_2, ..., R_k et en simplifiant par R_1, R_2, ..., R_{k-1}, on obtient R_k=200(1-1/100)(1-1/99) ... (1-1/(100-(k-2))), soit
R_k=200×99/100×98/99× ... ×(100-k+1)/(100-k+2)
R_k=(200/100)×(100-k+1)=202-2k ; on vérifie que k=1 donne bien 200 et que k=100 donne bien 2
Et donc R_{k+1}=202-2k-2 et R_k-R_{k+1}=2 qui est la quantité bue la kième fois (k=1, 2, ..., 99).
2) On raisonne toujours en termes de restes. R_1=200, mais cette fois,
$R_2=R_1(1-1/2)$, $R_3=R_2(1-1/3)$ etc $R_{100}=R_{99}(1-1/100)$, et donc R_{100}=200(1-1/2)(1-1/3)...(1-1/100),
et comme a×b=b×a, R_{100} est le même que celui de la question précédente, à savoir 2mL : **donc hier il restait, comme aujourd'hui, la même quantité de café : 2mL, cad** Abrar **a bu la même quantité de café**

hier et aujourd'hui : 198mL
Remarque : Mais hier, Abrar n'a pas bu la même quantité à chaque fois.
En effet, R_k=200(1-1/2)(1-1/3)...(1-1/k)=200×(1/2)×(2/3)×(3/4)×...×((k-1)/k)=200/k et ainsi
R_k-R_{k+1}=200(1/k-1/(k+1))=200/(k(k+1)).
Abrar **boit donc successivement 200/(1×2)mL, 200/(2×3)mL, ... , 200/(99×100)mL.**
Comme en tout elle a bu 198 mL, c'est que 200(1/(1×2)+1/(2×3)+ ... + 1/(99×100))=198, soit **1/(1×2)+1/(2×3)+ ... + 1/(99×100)=99/100**, égalité qu'il était demandé de montrer.
Bien entendu, on peut montrer cela sans boire du café : en effet dans le calcul ci-dessus on a "rencontré" la relation **1/k-1/(k+1)=1/(k(k+1))**, vraie évidemment pour tout réel k distinct de -1 et 0.
D'où 1/(1×2)+1/(2×3)+ ... + 1/(99×100)=(1-1/2)+(1/2-1/3)+(1/3-1/4)+...+(1/98-1/99)+(1/99-1/100) =1-1/100=99/100.
3) En généralisant Q2, R_{100}=200(1-1/2^k)(1-1/3^k)...(1-1/100^k), soit
pour k=2,
R_{100}=200((2^2-1)/2^2)((3^2-1)/3^2)...((100^2-1)/100^2), eta^2-1=(a-1)(a+1),
R_{100}=200((1×3)/2^2)×((2×4)/3^2)×((3×5)/4^2)×...×((97×99)/98^2)×((98×100)/99^2)×((99×101)/100^2)
On remarque qu'alors au numérateur il y a les facteurs 3^2, 4^2,...,99^2 et ainsi
R_{100}=200((2×100×101)/(2^2×100^2)=200×101/(2×100)=101 : Abrar **a donc bu 99mL.**
4) En généralisant maintenant Q1, R_{100}=200(1-1/100^k)(1-1/99^k)...(1-1/2^k), la même chose qu'à Q3, puisque, comme déjà dit, a×b=b×a ; donc, **pour k=2,** Abrar **a encore bu 99mL**
5) pour tout k, que Abrar commence par boire 1/2^k ou 1/100^k, R_{100} est toujours le même....

EXERCICE 15 : On cherche l'entier n tel que 1+2+...+n-(p+p+1)=2003 avec p+1 ≤n, p et p+1 étant les numéros des 2 pages collées.Donc n(n+1)/2=2003+2p+1, ce qui exige n(n+1)/2 ≥2003 et comme n(n+1)/2 est croissant avec n, on vérifie aisément (calculatrice) que le plus petit entier vérifiant cette condition est 63
si n=63 alors n(n+1)/2=2016, donc 2p+1=13 et p=6
si n=64 alors n(n+1)/2=2080, donc 2p+1=77 et p=38
On constate que les premières valeurs suivantes ne conviennent pas, la différence n(n+1)/2-2003 étant trop grande.Montrons que pour n ≥65 on a n(n+1)/2>2003+(n-1)+n et donc il sera impossible que n(n+1)/2=2003+p+p+1 avec p+1 ≤n, puisque cette égalité exige n(n+1)/2 ≤2003+(n-1)+n ;
n(n+1)/2-2003-(n-1)-n=(n(n-3)-4004)/2, et pour n ≥65 on a n(n-3)-4004 ≥65×62-4004=26>0.
Finalement il n'y a que 2 possibilités :soit le livre a 63 pages et les pages 6 et 7 sont collées, soit le livre a 64 pages et les pages 38 et 39 sont collées.

Exercice 16 : 1) $W_n = U_n - 2V_n$,

$$W_n = U_{n+1} - 2V_{n+1} = \frac{9U_n + 2V_n}{10} - 2\left(\frac{2U_n + 6V_n}{10}\right) = \frac{9U_n + 2V_n - 4U_n - 12V_n}{10} = \frac{5U_n - 10V_n}{10} = \frac{5}{10}(U_n - 2V_n) = \frac{1}{2}W_n.$$

Donc (W_n) est une suite géométrique de raison q=$\frac{1}{2}$ et de premier terme

$W_0 = 1.\ W_n = W_0 q^n = (\frac{1}{2})^n.\ \lim_{n\to+\infty} W_n = 0$ Car $(\frac{1}{2} \in [0,1[)$.

2)a) $U_{n+1} - U_n = \frac{9U_n + 2V_n}{10} - \frac{10}{10}U_n = \frac{2V_n - U_n}{10} = \frac{-W_n}{10} \le 0$.

$V_{n+1} - V_n = \frac{2U_n + 6V_n}{10} - \frac{10}{10}V_n = \frac{2V_n - 4U_n}{10} = \frac{2(U_n - 2V_n)}{10}$, $V_{n+1} - V_n = \frac{1}{5}W_n \ge 0$ donc (V_n) est croissante.

b) (U_n) est décroissante donc : $U_n \le U_0$ 'est à dire $U_n \le 3\ \forall n \in \mathbb{N}$, (V_n) est croissante pour tout n∈ ℕ on a :

$V_0 \le V_n \Rightarrow 1 \le V_n \Rightarrow 2 \le 2V_n$ or $U_n - 2V_n = W_n = (\frac{1}{2})^n \ge 0$, $U_n - 2V_n \ge 0 \Rightarrow U_n \ge 2V_n$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $2 \le 2V_n \le U_n \le 3$.

Exercice 17 : 1) Montrons par récurrence : $0 \le U_n \le 1$. $U_0 = 1$ la propriété est vraie pour n=0, soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $0 \le U_n \le 1$. et montrons $0 \le U_{n+1} \le 1$. $0 \le U_n \le 1. \Rightarrow 0 \le 1 - U_n^2 \le 1$

$\Rightarrow 0 \le \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-U_n^2}}{2}} \le \sqrt{\frac{1}{2}} \le 1 \Rightarrow 0 \le U_{n+1} \le 1$.

2) Montrons par récurrence que : $U_n = \sin\frac{\pi}{2^{n+1}}$, $U_0 = 1 = \sin\frac{\pi}{2}$ vraie, soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $U_n = \sin\frac{\pi}{2^{n+1}}$ et montrons que $U_{n+1} = \sin\frac{\pi}{2^{n+2}}$ or $U_{n+1} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-U_n^2}}{2}}$.

$\sqrt{1-U_n^2} = \sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{2^{n+1}}} = \sqrt{\cos^2\frac{\pi}{2^{n+1}}} = \cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$ car $\cos\frac{\pi}{2^{n+1}} > 0$. Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_n = \sin\frac{\pi}{2^{n+1}}$.

3)a) $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} U_k$ on a : $S_{n+1} = S_n + U_{n+1}$ et comme $U_{n+1} > 0 \Rightarrow (S_n)$ est croissante.

b) Soit $u : x \mapsto \sin x - x$; u est dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et $u'(x) = \cos x - 1; x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$; Comme $u'(x) \le 0 \Rightarrow u$ est décroissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ en plus $u(0) = 0 \Rightarrow$ pour tout réel $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$; $u(x) \le 0 \Rightarrow \sin x \le x; x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

pour tout $0 \le k \le n$ $0 \le \sin\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right) \le \frac{\pi}{2^{k+1}} \Rightarrow S_n \le \sum_{k=0}^{k=n}\frac{\pi}{2^{k+1}}$ or

$$\sum_{k=0}^{k=n}\frac{\pi}{2^{k+1}} = \frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{k=n}\frac{1}{2^k} = \frac{\pi}{2}\left[\frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right] = \frac{\pi}{2}\times 2\times(1-(\frac{1}{2})^{n+1}) \le \pi \Rightarrow S_n \le \pi$$ et comme $S_n \ge S_0$ et $S_0 = 1$ donc

$1 \le S_n \le \pi$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 18 : 1) $n \in IN$; soit la suite (U_n) de terme général $U_n = 3^{2n+2} + 2^{6n+1}$. Pour $n = 0$; $U_0 = 11$ donc U_0 est divisible par 11. Soit $p \in IN$; supposons que U_p est divisible par 11 et montrons que U_{p+1} est divisible par 11. $U_p = 11.k; k \in IN$; $U_{p+1} = 3^{2(p+1)+2} + 2^{6(p+1)+1} = 3^2.3^{2p+2} + 2^6.2^{6p+1} = 3^2(11k - 2^{6p+1}) + 64.2^{6p+1}$

$= 9.11k - 9.2^{6p+1} + 64.2^{6p+1} = 9.11k + 2^{6p+1}\times 55 = 11(9k + 5\times 2^{6p+1})$ signifie que U_{p+1} est divisible par 11.

Conclusion : $\forall n \in IN$; on a $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ est divisible par 11.

2) Soit la suite (V_n) de terme général $V_n = 10^n - 1$ Pour $n = 0$; $V_0 = 9$ donc V_0 est divisible par 9

Soit $p \in IN$; supposons que V_p est divisible par 9 et montrons que V_{p+1} est divisible par 9.

$V_{p+1} = 10^{p+1} - 1 = 10\times 10^p - 1$; On a $V_p = 10^p - 1 = 9k; k \in IN \Leftrightarrow 10^p = 9k + 1$

Donc $V_{p+1} = 10(9k+1) - 1 = 9 + 90k = 9(1+9k)$ et par suite V_{p+1} est divisible par 9.

Conclusion : $\forall n \in IN$; on a $10^n - 1$ est divisible par 9.

3) Soit P_n la propriété $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; n \in IN$. Pour $n = 1$; P_1. On a $1 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$

Soit $p \in IN$; supposons que $U_p = 1^2 + 2^2 + ... + p^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$ et montrons que

$U_{p+1} = \frac{(p+1)(p+2)(2p+3)}{6}$, $U_{p+1} = 1^2 + 2^2 + ... + p^2 + (p+1)^2 = U_p + (p+1)^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)+6(p+1)^2}{6}$

$= \frac{(p+1)[p(2p+1)+6(p+1)]}{6} = \frac{(p+1)(2p^2+7p+6)}{6}$; $2p^2 + 7p + 6 = 0$;

$\Delta = 49 - 48 = 1 \Leftrightarrow p_1 = 2$; $p_2 = -\frac{3}{2}$ donc : $2p^2 + 7p + 6 = 2(p+2)\left(p+\frac{3}{2}\right) = (p+2)(2p+3)$ et par suite $U_{p+1} = \frac{(p+1)(p+2)(2p+3)}{6}$, Conclusion : $\forall n \in IN^*$; on a $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

4) a) a est impair signifie il existe un entier $k \in IN^*$ tel que $a = 2k + 1$.

Pour $n = 1$; $a = (2k+1)^{2^1-1} = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k+1)$. Il est facile de vérifier que $k(k+1)$ est pair. donc $4k(k+1)$ est divisible par $8 = 2^3 = 2^{1+2}$ alors 2^{1+2} divise $(2k+1)^2 - 1$.

Soit $p \in IN$ supposons que 2^{p+2} divise $a^{2^p} - 1$ et montrons que 2^{p+3} divise $a^{2^{p+1}} - 1$.

$(2k+1)^{2^p} - 1 = \alpha 2^{p+2}$ alors $(2k+1)^{2^{p+1}} - 1 = \left[(2k+1)^{2^p}\right]^2 - 1 = (\alpha.2^{p+2}+1)^2 - 1 = \alpha^2 2^{2p+4} + 2\alpha 2^{p+2} + 1 - 1$

$\alpha^2.2^{2p+4} + \alpha.2^{p+3} = 2^{p+3}[\alpha^2.2^{p+1} + \alpha]$ donc 2^{p+3} divise $a^{2^{p+1}} - 1$

Conclusion : pour tout entier a impair ; on a 2^{n+2} divise $a^{2^n} - 1$.

Exercice 19

1. a. Pour obtenir le cinquième nombre pentagonal centré :
   Il faut ajouter 4×5 points aux 31 du quatrième nombre, le cinquième nombre pentagonal centré est donc 51.
   b. Pour passer au sixième pentagone centré, il faut rajouter $5 \times 5 = 25$ points. Le sixième nombre est donc 76.
2. a. Le triangle de gauche et le triangle de droite contiennent chacun $1 + 2 + \cdots + (n-1)$ points. Le rectangle en contient $n(n-1)$ d'où : $2(1 + 2 + \cdots + (n-1)) = n(n-1)$
   b. Le $n^{\text{ème}}$ nombre pentagonal centré comprend

$$1 + 5 + 5\times 2 + \cdots + 5(n-1) = 1 + 5(1 + 2 + \cdots + (n-1))$$
$$= 1 + 5\frac{n(n-1)}{2} \text{ points.}$$

   c. 2 176 est un nombre pentagonal centré car il existe n entier naturel tel que

$2\,176 = 1 + 5\frac{n(n-1)}{2}$ ou $2\,175 = 5\frac{n(n-1)}{2}$ ou $435 = \frac{n(n-1)}{2}$, soit $n = 30$.

3. a. Le nombre $5\dfrac{n(n-1)}{2}$ est un multiple de 5 donc son chiffre des unités est

5 si $\dfrac{n(n-1)}{2}$ est impair, donc n de la forme $4p+2$ ou $4p+3$

0 si $\dfrac{n(n-1)}{2}$ est pair donc n de la forme $4p$ ou $4p+1$.

Le $n^{\text{ème}}$ nombre pentagonal a donc pour chiffre des unités 6 dans le premier cas et 1 dans le second.

b. Le $n^{\text{ème}}$ nombre pentagonal est pair si n est de la forme $4p+2$ ou $4p+3$.

c. 20 092 010 est de la forme $4p+2$, donc le chiffre des unités est 6.

Exercice 20

1. On a 123456 → 123456 → 122456 →122356 →122336 → 12233(-2)
d'où $S_6 = 11 - 2 = 9$.
2. 123→ 123→ 12(-1) d'où $S_3 = 2$,
1234→ 1234→ 1224→ 122(-1) d'où $S_1 = 4$
12345→ 12345→ 12245→ 12235→1223(-2) d'où $S_5 = 6$.
3. Pour $n = 4$ et 6, $S_n = \left(\dfrac{n}{2}\right)^2$. On conjecture donc $S_{2010} = 1005^2 = 1\,010\,025$
4. - Si $n = 2p$ est pair, les deux derniers états de la liste sont
$12233\ldots pp2p$ puis $12233\ldots pp(1-p)$ et $S_p = \dfrac{2p(p+1)}{2} - 1 + 1 - p = p^2$
et la conjecture $S_n = p^2$ est bien vérifiée.
- Si $n = 2p+1$ est impair, les deux dernières étapes sont :
$12233\ldots pp(p+1)(2p+1)$ puis $12233\ldots pp(p+1)(-p)$ et $S_{2p+1} = \dfrac{2p(p+1)}{2} = p(p+1)$.
$p(p+1)$ n'est pas un carré car $p^2 < p(p+1) < (p+1)^2$.

Exercice 21

1. En regroupant les termes consécutifs deux par deux, $f(x)$ est la somme de $i = 1$ à $i = 1005$.
de $(2i-1)(x+2i-1) - 2i(x+2i) = -(x+4i-1)$
Cette somme est donc égale à $-1005(x-2013)$.

Dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 0$ a pour unique solution $x = 2013$.

2. De $f(x) = -1005(x-2013)$, on déduit que si k est impair, $k-2013$ est pair, et parce que 1005 est impair, $f(k)$ est multiple de $1005 \times 2 = 2010$, on en déduit aussi que $f(2011) = 2010$.

Exercice 22 :

1)a) $U_1 = \dfrac{U_0+V_0}{3} = \dfrac{1+\cos\theta}{2} = \dfrac{2\cos^2\frac{\theta}{2}}{2} = \cos^2\dfrac{\theta}{2}$, $V_1 = \sqrt{U_1V_0} = \sqrt{U_1} = \sqrt{\cos^2\dfrac{\theta}{2}} = \cos\dfrac{\theta}{2}$ car $\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{4}\right[$

$U_1 = \cos^2\dfrac{\theta}{2}$, $V_1 = \cos\dfrac{\theta}{2}$ $U_2 = \dfrac{U_1+V_1}{2} = \dfrac{\cos^2\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}}{2} = \dfrac{\cos\frac{\theta}{2}(1+\cos\frac{\theta}{2})}{2} = \dfrac{\cos\frac{\theta}{2}(2\cos^2\frac{\theta}{4})}{2}$.

$V_2 = \sqrt{U_2V_1} = \sqrt{\cos^2\dfrac{\theta}{2}\cos^2\dfrac{\theta}{4}} = \cos\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{4}$ $\boxed{U_2 = \cos\dfrac{\theta}{2}\cos^2\dfrac{\theta}{4}}$ et $\boxed{V_2 = \cos\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{4}}$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \le U_n \le V_n$,

Démontrons ce résultat par récurrence : $U_0 = \cos\theta$ $V_0 = 1$ $0 \le \cos\theta \le 1$ pour $\theta \in \left]0, \dfrac{\theta}{4}\right[$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $0 \le U_0 \le V_0$, supposons que $0 \le U_n \le V_n$ et montrer que $0 \le U_{n+1} \le V_{n+1}$ puisque $U_{n+1} = \dfrac{U_n+V_n}{2}$

Et U_n et V_n sont positifs $\Rightarrow$ $U_{n+1} \ge 0$, $V_{n+1}^2 - U_{n+1}^2 = U_{n+1}V_n - \dfrac{(U_n+V_n)^2}{4} = \dfrac{U_n+V_n}{2}V_n - \dfrac{(U_n+V_n)^2}{4}$

$= \dfrac{U_n+V_n}{4}(2V_n - U_n - V_n) = \dfrac{U_n+V_n}{4}(V_n - U_n)$ or $\dfrac{U_n+V_n}{4} \ge 0$ et $(V_n - U_n) \ge 0 \Rightarrow V_{n+1}^2 - U_{n+1}^2 > 0 \Rightarrow$

$V_{n+1}^2 \ge U_{n+1}^2$ or V_{n+1} et U_{n+1} sont positifs $\Rightarrow$ $V_{n+1} \ge U_{n+1}$: $\forall n \in \mathbb{N}$ $0 \le U_n \le V_n$.

c) Montrer que U est croissante : $U_{n+1} - U_n = \dfrac{U_n+V_n}{2} - U_n = \dfrac{V_n - U_n}{2} \ge 0$ $\Rightarrow$ U est une suite croissante.

$V_{n+1}^2 - V_n 2 = U_{n+1}V_n - V_n^2 = V_n(U_{n+1} - V_n) = V_n\left(\dfrac{U_n+V_n}{2} - V_n\right) = V_n\left(\dfrac{U_n - V_n}{2}\right) \le 0 \Rightarrow V_{n+1}^2 \le V_n^2$ et comme

$V_n \ge 0 \Rightarrow V_{n+1} \le V_n \Rightarrow (V_n)$ est une suite décroissante. On a pour n de $\mathbb{N}$ $0 \le U_n \le V_n \le 1 \Rightarrow (U_n)$ est une suite croissante majorée par 1 et (V_n) est une suite décroissante minorée par 0

2)a) Montrons par récurrence que pour tout $n \ge 1$, on a : $\begin{cases} V_n = \cos\dfrac{\theta}{2} \times \cos(\dfrac{\theta}{2^2}) \times \cos(\dfrac{\theta}{2^3}) \times \ldots \times \cos(\dfrac{\theta}{2^n}) \\ U_n = V_n \times \cos(\dfrac{\theta}{2^n}) \end{cases}$

* la propriété est vrai pour n=1, en effet $\begin{cases} V_1 = \cos\dfrac{\theta}{2} & \textit{vrai} \\ U_1 = V_1 \times \cos\left(\dfrac{\theta}{2^1}\right) & \textit{vrai} \end{cases}$, soit $n \in \mathbb{N}$ * supposons que la propriété est vrai pour n et montrons qu'elle est vraie pour l'ordre n+1

$U_{n+1} = \dfrac{U_n+V_n}{2} = \dfrac{V_n + V_n \times \cos\frac{\theta}{2}}{2} = V_n\cos^2\left(\dfrac{\theta}{2^{2n+1}}\right)$

$V_{n+1} = \sqrt{U_{n+1} \times V_n} = \sqrt{V_n^2 \times \cos^2\left(\dfrac{\theta}{2^{n+1}}\right)} = V_n\cos\left(\dfrac{\theta}{2^{n+1}}\right) = \cos\dfrac{\theta}{2} \times \cos\left(\dfrac{\theta}{2^2}\right) \times \ldots \times \cos\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right) \times \cos\left(\dfrac{\theta}{2^{n+1}}\right)$

$U_{n+1} = V_n \times \cos\left(\dfrac{\theta}{2^{n+1}}\right) \times \cos\left(\dfrac{\theta}{2^{n+1}}\right) = V_{n+1}\cos\left(\dfrac{\theta}{2^{n+1}}\right)$.

b) Montrons par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$* que $V_n = \dfrac{\sin\theta}{2^n\sin\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right)}$, * $V_1 = \cos\dfrac{\theta}{2}$,

$\dfrac{\sin\theta}{2\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)} = \dfrac{2\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}{2\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)} = \cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ vrai, soit $n \in \mathbb{N}$*, supposons que $V_n = \dfrac{\sin\theta}{2^n\sin\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right)}$ et montrons que

$V_{n+1}=\dfrac{\sin\theta}{2^{n+1}\sin\left(\dfrac{\theta}{2^{n+1}}\right)}$ or $V_{n+1}=V_n\cos\left(\dfrac{\theta}{2^{n+1}}\right)$ d'où $V_{n+1}=\dfrac{\sin\theta}{2^n\sin\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right)}\times\cos\left(\dfrac{\theta}{2^{n+1}}\right)$ or

$\sin\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right)=2\sin\left(\dfrac{\theta}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\dfrac{\theta}{2^{n+1}}\right)\Rightarrow V_{n+1}=\dfrac{\sin\theta}{2^n\times\sin\dfrac{\theta}{2^{n+1}}\times\cos\dfrac{\theta}{2^{n+1}}}\cos\dfrac{\theta}{2^{n+1}}=\dfrac{\sin\theta}{2^{n+1}\sin\left(\dfrac{\theta}{2^{n+1}}\right)}$ d'où le résultat.

Exrex 23

Remarque : la règle des signes permet de se limiter à des nombres et fractions positifs.

1. $0.0003\,0003\,0003\ldots=3\left[10^{-1}+10^{-8}+10^{-12}\ldots\right]$
$=\dfrac{3\times10^{-4}}{1-10^{-4}}=\dfrac{3}{10^4-1}=\dfrac{3}{9999}=\dfrac{1}{3333}=\cdots$
2. $0.437\,437\,437\ldots=437\left[10^{-3}+10^{-6}+10^{-9}\ldots\right]=\dfrac{437\times10^{-3}}{1-10^{-3}}=\dfrac{437}{999}$,
fraction irréductible ; toute fraction égale à celle-ci a un dénominateur de plus de trois chiffres.
3. $3.023\,23\,23\,23\ldots=3+23\left[10^{-3}+10^{-5}+10^{-7}+10^{-9}+\cdots\right]$
$=3+\dfrac{23\times10^{-3}}{1-10^{-2}}=3+\dfrac{2.3}{99}=\dfrac{299.3}{99}=\dfrac{2993}{990}$,
fraction irréductible et toute autre fraction égale à celle-ci a un dénominateur de plus de trois chiffres.
4. Si x a une écriture décimale périodique, on peut écrire
$$x=a+m\left[10^{-(p+q)}+10^{-(2p+q)}+\cdots\right]=a+m\frac{10^{-(p+q)}}{1-10^{-p}}=a+\frac{m}{(10^p-1)10^q}$$
où a est un nombre décimal ayant q chiffres après la virgule et m un entier à p chiffres.
Le nombre de droite est bien un rationnel.
5. Réciproquement, soit p et q non nuls dans $\mathbb{N}$ et supposons que q a k chiffres, c'est-à-dire que $10^{k-1}\leqslant q\leqslant10^k$.
Considérons les deux suites d'entiers $\{a_i\}$ et $\{r_i\}$ ainsi définies :
a_1 et r_1 sont le quotient et le reste de la division euclidienne de p par q : $p=a_1q+r_1$ avec $0\leqslant r_1<q$
ou $\dfrac{p}{q}=a_1+\dfrac{r_1}{q}$.
Puis r_2 et a_2 sont définis de même comme le quotient et le reste de la division de 10^kr_1 par q :
$10^kr_1=a_2q+r_2$ et $0\leqslant r_2<q$
et $\dfrac{p}{q}=\sum_{i=1}^{i}\left(a_i.10^{-k(i-1)}+r_i.10^{-ki}\right)$

Remarque : pour $i\geqslant2$, $a_i\leqslant10^k\dfrac{r_{i-1}}{q}<10^k$. a_i s'écrit avec au plus k chiffres.

En poursuivant ainsi, on se retrouve dans l'un des cas suivants :

- Ou bien il existe i_0 tel que $r_{i_0}=0$ et alors $r_i=0$ pour tout $i\geqslant i_0$ de sorte que $\dfrac{p}{q}$ est décimal.
Il admet deux développements de période 1, l'un qui se termine par une suite de 0, l'autre par une suite de 9.

- Ou bien il existe i_0 et $j_0<i_0$ tels que $r_{i_0}\neq r_{j_0}\neq0$. un tel couple (i_0,j_0) existe puisque r_i prend au plus q-1 valeurs non nulles.
Mais alors, $r_{i_0+t}=r_{j_0+t}$ et $a_{i_0+t}=a_{j_0+t}$ pour tout t et à partir du rang $i_0\leqslant q-1$, la suite $\{a_i\}$ est périodique.

Exercice N° 1: 1) a) ; 2)b) ; 3)b) ; 4) b) ; 5)b) ;6)b) ; 7)a) ; 8) c) ;9)c)

10)a) $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\dfrac{2}{(-3)^n}+1}{\dfrac{1}{(-3)^n}+5}=\dfrac{1}{5}$,11)c $|U_n|=\left|\dfrac{(-1)^n\sin(n)}{A_n^3}\right|\leq\dfrac{1}{A_n^3}\leq\dfrac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=0$,

12)b $U_n=\dfrac{C_n^0}{2^0}+\dfrac{C_n^1}{2^1}+\dfrac{C_n^2}{2^2}+\ldots+\dfrac{C_n^n}{2^n}\geq\dfrac{C_n^0}{2^0}+\dfrac{C_n^1}{2^1}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{C_n^0}{2^0}+\dfrac{C_n^1}{2^1}=\lim\limits_{n\to+\infty}1+\dfrac{n}{2}=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=+\infty$

Exercice N° 2 :1) Soit $n\geq1$; $2+4+\ldots+2n=\dfrac{n(2+2n)}{2}=n(1+n)$. somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 2.

$1+3+\ldots+(2n+1)=\dfrac{(n+1)(1+2n+1)}{2}=(n+1)^2\Rightarrow U_n=\dfrac{n(1+n)}{(n+1)^2}=\dfrac{n}{n+1}\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=1$

2) $1+2+2^2+\ldots+2^n=\dfrac{1-2^{n+1}}{1-2}=2^{n+1}-1$. somme de $(n+1)$ termes consécutifs d'une suite géométrique de raison 2, $1+3+3^2+\ldots+3^n=\dfrac{1-3^{n+1}}{1-3}=\dfrac{1}{2}\left(3^{n+1}-1\right)\Rightarrow U_n=\dfrac{2\left(2^{n+1}-1\right)}{3^{n+1}-1}=\dfrac{2\times2^{n+1}\left(1-\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)}{3^{n+1}\left(1-\dfrac{1}{3^{n+1}}\right)}$

$=2\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}\times\dfrac{\left(1-\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)}{\left(1-\dfrac{1}{3^{n+1}}\right)}\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2^{n+1}}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{3^{n+1}}=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=0$

Exercice 3 :1) •$s_2=1!\leq2!$ • Posons $s_n=1!+2!+\ldots+(n-1)!\Rightarrow s_{n+1}=s_n+n!$

Si $s_n\leq n!\Rightarrow s_{n+1}\leq2\times n!$ or $2\leq n+1\Rightarrow2\times n!\leq(n+1)!\Rightarrow s_{n+1}\leq(n+1)!$

Conclusion : $1!+2!\ldots+(n-1)!\leq n!$, $n\geq2$

2)a)

$n\geq2, U_n=\dfrac{1!+2!+\ldots+(n-1)!+n!}{(n+1)!}=\dfrac{s_n+n!}{(n+1)!}$ or $s_n\leq n!\Rightarrow U_n\leq\dfrac{2n!}{(n+1)!}$ or $\dfrac{2n!}{(n+1)!}=\dfrac{2}{n+1}\Rightarrow U_n\leq\dfrac{2}{n+1}$, $n\geq2$

b) $U_n>0$, $n\geq2\Rightarrow U_n\leq\dfrac{2}{n+1}$, $n\geq1$. $|U_n|\leq\dfrac{2}{n+1}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2}{n+1}=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=0$

Exercice 4 :1)a) $V_2=\dfrac{1+1}{1^2}$, $V_1=2$, $V_3=\dfrac{2+1}{2^2}$, $V_2=\dfrac{3}{4}\times2=\dfrac{3}{2}$

b) $V_1=1$ et $\dfrac{1}{(1-1)!}=1\Rightarrow V_n=\dfrac{n}{(n-1)!}$ est vérifié pour $n=1$ Soit $n\geq1$,Supposons que $V_n=\dfrac{n}{(n-1)!}$ et

montrer que $V_{n+1}=\frac{n+1}{n!}$. $V_{n+1}=\frac{n+1}{n^2}V_n$ et de l'hypothèse de récurrence $V_n=\frac{n}{(n-1)!}$

$\Rightarrow V_{n+1}=\frac{n+1}{n^2}\times\frac{n}{(n-1)!}=\frac{n+1}{n(n-1)!}=\frac{n+1}{n!}$ Conclusion, $V_n=\frac{n}{(n-1)!}$, $n\geq 1$

2)a) Soit $n\geq 2$, $\frac{V_n+1}{V_n}=\frac{n+1}{n!}\times\frac{(n-1)!}{n}=\frac{n+1}{n^2}$, $\frac{n+1}{n^2}-\frac{3}{4}=\frac{-3n^2+4n+4}{4n^2}=\frac{-3(n-2)\left(n+\frac{2}{3}\right)}{4n^2}\Rightarrow$

si $n\geq 2$, $\frac{n+1}{n^2}-\frac{3}{4}\leq 0\Rightarrow\frac{V_n+1}{V_n}\leq\frac{3}{4}$, $n\geq 2$.b) $n=2$, $\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}=1$, $V_n\leq\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}$. V_2 est vérifié pour $n=2$

*Soit $n\geq 2$.(Remarquons que $V_n>0, n\geq 1$).Supposons que $V_n\leq\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}$. V_2 et montrons que

$V_{n+1}\leq\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}V_2$, $V_{n+1}\leq\frac{3}{4}V_n$ et $V_n\leq\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}V_2\Rightarrow V_{n+1}\leq\frac{3}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}.V_2\Rightarrow V_{n+1}\leq\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}.V_2$

c) On a : $V_n>0, n\geq 2\Rightarrow|V_n|\leq\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}.V_2$ Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}V_n=0$.

Exercice 5: 1) On a : $U_n=\frac{10^n}{n!}$; $U_0=\frac{10^0}{0!}=1$; $U_1=\frac{10^1}{1!}=10$ et $U_2=\frac{10^2}{2!}=50$

2)a)pour tout $n\in\mathbb{N}$, On a : $U_{n+1}=\frac{10^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{10^{n+1}}{(n+1)n!}$; $\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{\frac{10^{n+1}}{(n+1)n!}}{\frac{10^n}{n!}}=\frac{10^{n+1}}{(n+1)n!}\cdot\frac{n!}{10^n}=\frac{10}{n+1}$

b) (U_n) est décroissante si et seulement si $\frac{U_{n+1}}{U_n}\leq 1$ signifie $n+1\geq 10\Leftrightarrow n\geq 9$.Donc (U_n) est décroissante pour $n\geq 9$

3)a)puisque (U_n) est décroissante pour $n\geq 9$, $\frac{U_{n+1}}{U_n}\leq\frac{U_{11}}{U_{10}}$, $U_{11}=\frac{10\times 10^{10}}{11\times 10!}$ et $U_{10}=\frac{10^{10}}{10!}$, $\frac{U_{11}}{U_{10}}=\frac{10}{11}$

b)On a : $\left.\begin{array}{l}\frac{U_n}{U_{n-1}}\leq\frac{10}{11}\\ \frac{U_{n-1}}{U_{n-2}}\leq\frac{10}{11}\\ .....\\ .....\\ \frac{U_{11}}{U_{10}}\leq\frac{10}{11}\end{array}\right\}(n-10)$ termes

D'après le calcul on obtient : $\frac{U_n}{U_{n-1}}\times\frac{U_{n-1}}{U_{n-2}}\times.....\times\frac{U_{11}}{U_{10}}\leq\left(\frac{10}{11}\right)^{n-10}$ signifie que

$\frac{U_n}{U_{10}}\leq\left(\frac{10}{11}\right)^{n-10}\Leftrightarrow U_n\leq U_{10}\cdot\left(\frac{10}{11}\right)^{n-10}$

c) Soit la suite (V_n) de terme général $V_n=U_0\left(\frac{10}{11}\right)^{n-10}$; $n\geq 10$; (V_n) est une suite géométrique de raison $q=\frac{10}{11}<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}V_n=0$, $0\leq U_n\leq V_n$ ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=0$

Exercice n°6 : 1) $u_1=\frac{u_0}{2+2u_0}=\frac{1}{4}$ et $u_2=\frac{u_1}{2+2u_1}=\frac{1}{10}$

2) Soit n un entier naturel. Si $u_n>0\Leftrightarrow 2+2u_n>0\Rightarrow u_{n+1}>0$. On a $u_0=1>0$ et $u_n>0\Rightarrow u_{n+1}>0$ Par suite, pour tout entier n, $u_n>0$. D'où $u_n\neq -1$ et $u_n\neq 0$.

3) Pour tout entier naturel n, $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n}{2+2u_n}-u_n=\frac{u_n-u_n(2+2u_n)}{2+2u_n}=\frac{u_n(1+2u_n)}{2+2u_n}$

donc : $u_{n+1}-u_n<0\Rightarrow(u_n)$ est décroissante. Il ensuit : pour tout entier n, $0<u_n\leq u_0$ d'où $0<u_n\leq 1$. Ainsi la suite est bornée.

4) $v_0=\frac{1}{u_0}+2=3$, $v_1=\frac{1}{u_1}+2=\frac{7}{3}$ et $v_2=\frac{1}{u_2}+2=\frac{17}{7}$

5) Comme pour tout entier naturel n, $u_n\neq 0\Rightarrow\frac{1}{u_n}\neq 0$ alors $v_n\neq 2$. D'autre part,

$v_n=\frac{1}{u_n}+2\Leftrightarrow\frac{1}{u_n}=v_n-2\Leftrightarrow u_n=\frac{1}{v_n-2}$.

6) Pour tout entier naturel n, $v_{n+1}=\frac{1}{u_{n+1}}+2=\frac{2+2u_n}{u_n}+2=\frac{2}{u_n}+4=2\left(\frac{1}{u_n}+2\right)=2v_n$ donc (v_n) est une suite géométrique de raison 2.

7) Pour tout entier naturel n, $v_n=v_0.2^n=3.2^n$ donc $u_n=\frac{1}{v_n-2}=\frac{1}{3.2^n-2}$ et comme $2>1$ alors

$\lim\limits_{n\to+\infty}2^n=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}3.2^n-2=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$

EXERCICE 7 :1) a) $U_{n+1}=\frac{n+1}{3^{n+1}}$; $\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{n+1}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{n}=\frac{n+1}{3n}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)$ on a $\forall n\in\mathbb{N}^*$;

$1+\frac{1}{n}\leq 2$ donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $\frac{U_{n+1}}{U_n}\leq\frac{2}{3}$

b) Puisque $\frac{U_{n+1}}{U_n} \le \frac{2}{3} < 1$ donc (U_n) est décroissante.

c) On a :
$$\left.\begin{array}{l} \frac{U_n}{U_{n-1}} \le \frac{2}{3} \\ \frac{U_{n-1}}{U_{n-2}} \le \frac{2}{3} \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ \frac{U_2}{U_1} \le \frac{2}{3} \end{array}\right\} n-1 \text{ termes}$$

On fait le produit membre à membre on obtient : $\frac{U_n}{U_{n-1}} \times \frac{U_{n-1}}{U_{n-2}} \times \ldots\ldots\ldots \times \frac{U_2}{U_1} \le \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ signifie que

$\frac{U_n}{U_1} \le \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \Leftrightarrow U_n \le \frac{1}{3}.\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$

d) $0 \le U_n \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$ on a $\forall n \in IN^*$; la suite $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ est géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$; $-1 < q < 1$ $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$

2) $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} U_k$; $\frac{S_{n+1}}{S_n} = 1 + \frac{U_{n+1}}{S_n} > 1$ car $U_{n+1} > 0$ et $S_n > 0$ donc (S_n) est croissante ; de même on a :

$U_n \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$; $\forall n \in IN^*$ donc $S_n \le \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^n$. On a $\sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{2}{3}.\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}} = 2\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) \le 2$ d'où $S_n \le 2$

Conclusion : (S_n) est croissante, majorée par 2.

EXERCICE 8: 1)Pour $n = 0$; on a $U_0 = 0$ alors $0 < U_0 < \sqrt{2}$. Soit $p \in IN$, supposons que $0 < U_p < \sqrt{2}$ et montrons que $0 \le U_{p+1} < \sqrt{2}$. On a $0 < U_p < \sqrt{2} \Leftrightarrow 0 < U_p^2 + 2 < 4$ d'où

$\Leftrightarrow -2 < -U_p^2 < 0 \Leftrightarrow 2 < 4 - U_p^2 < 4 \Leftrightarrow \sqrt{2} < \sqrt{4-U_p^2} < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{4-U_p^2}} < \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow 1 < \frac{2}{\sqrt{4-U_p^2}} < \sqrt{2} \Leftrightarrow 1 < U_{p+1} < \sqrt{2} \Leftrightarrow 0 < U_{p+1} < \sqrt{2}$ ainsi d'après le principe de raisonnement par récurrence On a $\forall n \in IN$; $0 < U_n < \sqrt{2}$

2) a) $U_{n+1}^2 - U_n^2 = \frac{4}{4-U_n^2} - U_n^2 = \frac{4 - U_n^2(4-U_n^2)}{4-U_n^2} = \frac{U_n^4 - 4U_n^2 + 4}{4-U_n^2}$.

b) $U_{n+1}^2 - U_n^2 = \frac{U_n^4 - 4U_n^2 + 4}{4-U_n^2} \frac{(U_n{}^2 - 2)}{4-U_n^2}$ donc $U_{n+1} > U_n$

3) a) $V_n = \frac{2+U_n^2}{2-U_n^2}$; $V_{n+1} = \frac{2+U_{n+1}^2}{2-U_{n+1}^2} = \frac{2+\frac{4}{4-U_n^2}}{2-\frac{4}{4-U_n^2}} = \frac{8-2U_n^2+4}{8-2U_n^2-4} = \frac{12-2U_n^2}{4-2U_n^2} = \frac{6-U_n^2}{2-U_n^2}$.

$V_{n+1} - V_n = \frac{6-U_n^2-2-U_n^2}{2-U_n^2} = \frac{4-2U_n^2}{2-U_n^2} = \frac{2(2-U_n^2)}{2-U_n^2} = 2$ et par suite (V_n) est une suite arithmétique de raison $r = 2$

b) $V_n = V_0 + nr$; $V_0 = \frac{2+U_0^2}{2-U_0^2} = 1$ donc $V_n = 1 + 2n$

c) $V_n = \frac{2+U_n^2}{2-U_n^2} \Leftrightarrow U_n^2 = \frac{2(V_n-1)}{V_n+1} \Leftrightarrow U_n = \sqrt{\frac{2(V_n-1)}{V_n+1}} \Leftrightarrow U_n = \sqrt{\frac{2(2n)}{2n+2}} \Leftrightarrow U_n = \sqrt{\frac{4n}{2(n+1)}}$

$\Leftrightarrow U_n = \sqrt{\frac{2n}{n+1}}$

4) $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (kU_{k-1}^2)$, On a $U_{k-1} = \sqrt{\frac{2(k-1)}{k}} \Leftrightarrow U_{k-1}^2 = \frac{2(k-1)}{k} \Leftrightarrow kU_{k-1}^2 = 2(k-1)$ donc S_n est la somme de n termes d'une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $0 \Rightarrow S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} 2k = 2\frac{n(n-1)}{2} = n(n-1)$.

5) a) $n \in IN$; On a : $0 \le U_n < \sqrt{2}$ ce qui donne

que $|U_n - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - U_n$ donc $|U_n - \sqrt{2}| = \frac{(\sqrt{2}-U_n)(U_n+\sqrt{2})}{U_n+\sqrt{2}} = \frac{2-U_n^2}{U_n+\sqrt{2}} = \frac{2-\frac{2n}{n+1}}{U_n+\sqrt{2}} = \frac{2}{n+1}.\frac{1}{U_n+\sqrt{2}}$.

On a : $0 < \frac{1}{U_n+\sqrt{2}} \le 1$ car $U_n > 0$ et $U_n + \sqrt{2} > 1$ donc $= \frac{2}{n+1}.\frac{1}{U_n+\sqrt{2}} \le \frac{2}{n+1}$ ce qui donne que

$|U_n - \sqrt{2}| \le \frac{2}{n+1}$

b) On a : $|U_n - \sqrt{2}| \le \frac{2}{n+1}$; $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2}{n+1} = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} (U_n - \sqrt{2}) = 0$ donc $\Leftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \sqrt{2}$

EXERCICE 9 : 1) a) $U_1 = 3$; $U_2 = \frac{10}{3}$

b) On a $U_1 - U_0 = 1$; $U_2 - U_1 = \frac{1}{3}$ on a $U_2 - U_1 \neq U_1 - U_0 = 1$ donc la suite (U_n) n'est pas arithmétique

On a $\frac{U_1}{U_0} = \frac{3}{2}$; $\frac{U_2}{U_1} = \frac{10}{9}$ on a $\frac{U_2}{U_1} \neq \frac{U_1}{U_0}$ donc la suite (U_n) n'est pas géométrique.

2) Pour $n = 0$; $U_0 = 2 < 4$; soit $p \in IN$; supposons que $U_p < 4$ et montrons que $U_{p+1} < 4$.

$U_{p+1} - 4 = \frac{2U_p - 16}{U_p - 6} - 4 = \frac{-2U_p + 8}{U_p - 6} = \frac{2(4 - U_p)}{U_p - 6} < 0$ car $4 - U_p > 0$ et $U_p - 6 < 0$ d'où $\forall p \in IN$ On a $U_{p+1} < 4$

Conclusion : d'après le principe de raisonnement par récurrence On a $\forall n \in IN$; $U_n < 4$

3) Soit $n \in IN$;

$U_{n+1} - U_n = \frac{2U_n - 16}{U_n - 6} - U_n = \frac{2U_n - 16 - U_n(U_n - 6)}{U_n - 6} = \frac{-U_n^2 + 8U_n - 16}{U_n - 6} = \frac{-(U_n - 4)^2}{U_n - 6} > 0$ car $U_n - 6 < 0$

donc $U_{n+1} - U_n > 0$ ainsi (U_n) est croissante.

4) a) $V_{n+1} = \frac{1}{U_{n+1} - 4} = \frac{1}{\frac{2U_n - 16}{U_n - 6} - 4} = \frac{1}{\frac{2(4 - U_n)}{U_n - 6}} = \frac{U_n - 6}{2(4 - U_n)} = -\frac{6 - U_n}{2(4 - U_n)} = -\frac{2 + 4 - U_n}{2(4 - U_n)} = -\left(\frac{1}{4 - U_n} + \frac{1}{2}\right)$

$= -\frac{1}{2} + V_n$ donc $V_{n+1} = V_n - \frac{1}{2}$ d'où la suite (V_n) est arithmétique de raison $-\frac{1}{2}$.

b) $V_n = V_0 + nr = -\frac{1}{2}(1 + n); n \in IN$; $U_n = 4 + \frac{1}{V_n} = \frac{4n + 2}{n + 1}$. c) $\lim_{n \to +\infty} V_n = -\infty$ et $\lim_{n \to +\infty} U_n = 4$.

EXERCICE 10 : 1) $U_1 = \frac{6}{5}$; $U_2 = \frac{1}{5}U_1 + \frac{4}{5} = \frac{6}{25} + \frac{20}{25} = \frac{26}{25}$; $U_3 = \frac{1}{5}U_2 + \frac{4}{5} = \frac{26}{125} + \frac{100}{125} = \frac{126}{125}$;

$U_4 = \frac{1}{5}U_3 + \frac{4}{5} = \frac{126}{625} + \frac{500}{625} = \frac{626}{625}$ $U_5 = \frac{1}{5}U_4 + \frac{4}{5} = \frac{626}{3125} + \frac{2500}{3125} = \frac{3126}{3125}$

2) On a $U_1 = \frac{6}{5} > 1$; soit $p \in IN$, supposons que $U_p > 1$ et montrons que $U_{p+1} > 1$.

$U_p > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{5}U_p > \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{5}U_p + \frac{4}{5} > \frac{1}{5} + \frac{4}{5} = 1$ Donc $U_{p+1} > 1$ ainsi pour tout $n \in IN^*$; $U_n > 1$

3) $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{5}U_n + \frac{4}{5} - U_n = \frac{4}{5}(1 - U_n)$ donc $U_{n+1} - U_n < 0$ car $U_n > 1$ ainsi (U_n) est décroissante.

4) $V_n = U_n - 1$; $V_{n+1} = U_{n+1} - 1 = \frac{1}{5}U_n + \frac{4}{5} - 1 = \frac{1}{5}(U_n - 1) = \frac{1}{5}V_n$ donc (V_n) est géométrique de raison $\frac{1}{5}$

5) a) (V_n) est géométrique et $q = \frac{1}{5} \in]-1,1[$ donc $\lim_{n \to +\infty} V_n = 0$; $U_n = V_n + 1$ donc $\lim_{n \to +\infty} U_n = 1$

b) $\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} 3(n + 1) - 3 \lim_{n \to +\infty} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) = +\infty$

EXERCICE 11 1) On a $\forall n \in IN$; $0 < U_0 \leq \frac{1}{2}$ supposons que $0 < U_p \leq \frac{1}{2}$; $p \in IN$ et montrons que $0 < U_{p+1} \leq \frac{1}{2}$.

On a $0 < U_p \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq -U_p < 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq 2 - U_p < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{2 - U_p} \leq \frac{2}{3} \Leftrightarrow 0 < \frac{U_p}{2 - U_p} \leq \frac{1}{3} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \forall p \in IN$

on a $0 < U_{p+1} \leq \frac{1}{2}$ **Conclusion** : d'après le principe de raisonnement par récurrence On a $\forall n \in IN$; $0 < U_n \leq \frac{1}{2}$

2) a) On a $U_n \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -U_n \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 - U_n \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2 - U_n} \leq \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{U_n}{2 - U_n} \leq \frac{2}{3}U_n$ d'où $\forall n \in IN$ on a $U_{n+1} \leq \frac{2}{3}U_n$

b) $U_{n+1} \leq \frac{2}{3}U_n \Leftrightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{2}{3} < 1$ Donc (U_n) est décroissante

3) a) On a $U_1 = \frac{1}{3}$ d'où $U_1 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^0 \cdot \frac{1}{2}$; supposons que $U_p \leq \left(\frac{2}{3}\right)^p U_0$ et montrons que $U_{p+1} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{p+1} U_0$

On a : $U_p \leq \left(\frac{2}{3}\right)^p U_0$ et $U_{p+1} \leq \frac{2}{3}U_p$ $U_{p+1} \leq \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^p U_0 = \left(\frac{2}{3}\right)^{p+1} U_0$

Conclusion : d'après le principe de raisonnement par récurrence On a $\forall n \in IN$; $0 < U_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n U_0$

b)Puisque $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n U_0 = 0$ alors $\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$

4)a) $V_{n+1} = \frac{1}{U_{n+1}} - 1 = \frac{2 - U_n}{U_n} - 1 = \frac{2}{U_n} - 2 = 2\left(\frac{1}{U_n} - 1\right)$ donc (V_n) est une suite géométrique de raison 2.

On a : $V_n = V_0 q^n = 2^n$

b) $V_n = \frac{1}{U_n} - 1 \Leftrightarrow V_n + 1 = \frac{1}{U_n} \Leftrightarrow U_n = \frac{1}{V_n + 1} = \frac{1}{2^n + 1}$

5)a) $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{U_k} = \sum_{k=0}^{n} (V_k + 1) = n + 1 + \sum_{k=0}^{n} V_k = n + 1 + V_0 \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = n + 1 + 2^{n+1} - 1 = n + 2^{n+1}$

b) $\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} (n + 2^{n+1}) = +\infty$

Exercice n°12 : 1) f est la restriction d'une fonction rationnelle alors f est dérivable sur $D_f =]-3, +\infty[$. Et pour tout $x \in]-3, +\infty[$, $f'(x) = \frac{4(x + 3) - (4x + x)}{(x + 3)^2} = \frac{10}{(x + 3)^2} \geq 0$ pour tout $x \in]-3, +\infty[$.

x	-3		+∞
f(x)	-∞	↗	4

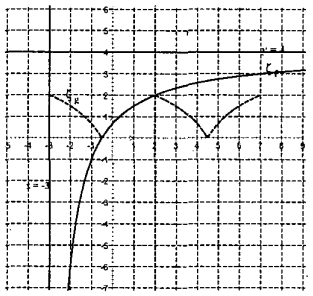
x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
f(x)	-6	-1	0,66	1,5	2	2,33	,257	2,75	2,88	3

$\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -3^-} \frac{4x+2}{x+3} = \frac{-10}{0^+} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{4x+2}{x+3} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{4x}{x} = 4$

2) a) on a : $0 \le U_0 \le 2$ On suppose que $0 \le U_n \le 2$ et on va montrer que $0 \le U_{n+1} \le 2$.

f est continue et croissante sur [0 ;2] alors

$0 \le U_n \le 2 \Leftrightarrow f(0) \le f(U_n) \le f(2)$ donc $\frac{2}{3} \le u_{n+1} \le 2$.



Conclusion : Pour tout entier n, on a : $0 \le U_n \le 2$.

b) $u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n+2}{u_n+3} - u_n = \frac{4u_n+2-u_n^2-3u_n}{u_n+3}$

$= \frac{-u_n^2+3u_n+2}{u_n+3} = \frac{-(u_n+1)(u_n-2)}{u_n+3}$

et comme $0 \le u_n \le 2$ pour tout entier naturel,

alors $u_n+1 \ge 0, u_n-2 \le 0$ et $u_n+3 \ge 0$ donc $u_{n+1} - u_n \ge 0$ d'où

$u_{n+1} \ge u_n$ et par suite (u_n) est une suite croissante.

3)

a) $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-2}{u_{n+1}+1} = \frac{\frac{4u_n+2}{u_n+3}-2}{\frac{4u_n+2}{u_n+3}+1} = \frac{\frac{4u_n+2-2u_n-6}{u_n+3}}{\frac{4u_n+2+u_n+3}{u_n+3}} = \frac{2u_n-4}{5u_n+5} = \frac{2}{5}\left(\frac{u_n-2}{u_n+1}\right) = \frac{2}{5}v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc (v) est

une géométrique de raison $q = \frac{2}{5}$ et du premier terme $v_0 = -2$ .b) $v_n = v_0 q^n = -2\times\left(\frac{2}{5}\right)^n$ et on a

$v_n = \frac{u_n-2}{u_n+1} \Leftrightarrow v_n(u_n+1) = (u_n-2) \Leftrightarrow u_n = -\frac{v_n+2}{v_n-1}$ donc $u_n = -\frac{-2\times\left(\frac{2}{5}\right)^n+2}{-2\times\left(\frac{2}{5}\right)^n-1}$ 0

c) on a $\frac{2}{5} \in]-1;1[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$ ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$

4) voir figure.

Exercice 13: 1)a) à l'instant $t = 1$, on injecte une dose de 1.8 unité.La dose restante dans le sang après la premier injection est $\frac{70}{100}\times 1.8$ unités.Ainsi $Q_1 = 1.8 + (0.7).(1.8) = 3.06$

b) $Q_2 = \underbrace{1.8}_{\text{quantité injectée à l'instant t=2}} + \underbrace{(0.7)Q_1}_{\text{quantité restante à l'instant t=2}} = 3.94$

2)a) Soit $n \ge 1$, $Q_{n+1} = 1.8 + (0.7)Q_n$. b) $f(x) = 1.8 + 0.7x$. c) $f(x) = x \Leftrightarrow 1.8 + 0.7x = x \Leftrightarrow x = 6$

3) Soit $n \ge 1$, $T_{n+1} = Q_{n+1} - 6 = 1.8 + 0.7Q_n - 6 = 0.7Q_n - 4.2 = 0.7(Q_n - 6) = 0.7T_n$

$\Rightarrow (T_n)$ est une suite géométrique de raison 0.7.

b) (T_n) est une suite géométrique de raison $0.7 \Rightarrow T_n = T_1(0.7)^{n-1}, n \ge 1$.Or $T_1 = Q_1 - 6 = -2.94$

$\Rightarrow T_n = -2.94(0.7)^{n-1}, n \ge 1. \Rightarrow Q_n = -2.94(0.7)n - 1 + 6, n \ge 1$

$2.94 = 6\times 0.49 = 3\times(0.7)^2 \Rightarrow Q_n = 6\left[1-(0,7)^{n+1}\right], n \ge 1$

4) $Q_5 = 6\left[1-(0,7)^6\right] \approx 5,3$. 5) $\lim\limits_{n\to+\infty} Q_n = 6$

EXERCICE 14 : 1) On a $U_0 \in IR^*$; supposons que $U_p > 0$, $n \in IN$; $U_{p+1} = \frac{2U_p}{\sqrt{3+U_p^2}} > 0$ car $U_p > 0$

D'après le principe de raisonnement par récurrence ; On a $\forall n \in IN$.

2) (U_n) est constante si et seulement si $U_{n+1} = U_n \Leftrightarrow U_1 = U_0 \Leftrightarrow \frac{2U_0}{\sqrt{3+U_0^2}} = U_0 \Leftrightarrow \sqrt{3+U_0^2} = 2$

$\Leftrightarrow U_0^2 = 1 \Rightarrow U_0 = 1$ car $U_0 > 0$ et par suite (U_n) est constante pour $U_0 = 1$

3) On prend $U_0 \ne 1$

a) $U_{n+1} - 1 = \frac{2U_n - \sqrt{3+U_n^2}}{\sqrt{3+U_n^2}} = \frac{4U_n^2 - 3 - U_n^2}{\sqrt{3+U_n^2}\left(2U_n + \sqrt{3+U_n^2}\right)} = \frac{3(U_n^2-1)}{\sqrt{3+U_n^2}\left(2U_n + \sqrt{3+U_n^2}\right)}$

$U_{n+1} - 1 = \frac{3(U_n+1)(U_n-1)}{\sqrt{3+U_n^2}\left(2U_n + \sqrt{3+U_n^2}\right)}$, comme $\frac{3(U_n+1)}{\sqrt{3+U_n^2}\left(2U_n + \sqrt{3+U_n^2}\right)}$ est positif $\Rightarrow (U_{n+1}-1)$ et ont le même signe.

$U_{n+1} - U_n = U_n\left(\frac{2-\sqrt{3+U_n^2}}{\sqrt{3+U_{n-1}^2}}\right) = \frac{U_n(1-U_n^2)}{\sqrt{3+U_n^2}\left(2+\sqrt{3+U_n^2}\right)}$; $U_{n+1} - 1$ et $U_n - 1$ ont le même signe

b) $U_{n+1} - U_n = (U_{n+1}-1) - (U_n - 1) > 0$ sur $]1;+\infty[$, $U_{n+1} - U_n = (U_{n+1}-1) - (U_n-1) < 0$ sur $]0;1[$

4) On prend $U_0 = 2$. a) $V_n = \frac{U_n^2 - 1}{U_n^2}$.

$V_{n+1} = \frac{U_{n+1}^2 - 1}{U_{n+1}^2} = \frac{\frac{4U_n^2}{3+U_n^2} - 1}{\frac{4U_n^2}{3+U_n^2}} = \frac{4U_n^2 - U_n^2 - 3}{4U_n^2} = \frac{3U_n^2 - 3}{4U_n^2} = \frac{3}{4}\frac{(U_n^2-1)}{U_n^2} = \frac{3}{4}V_n$ Donc (V_n) est géométrique de raison $\frac{3}{4}$

b) $V_n = V_0.q^n$; $V_0 = \frac{U_0^2-1}{U_0^2} = \frac{4-1}{4} = \frac{3}{4}$ donc $V_n = \frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n = \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$

$V_n = \frac{U_n^2-1}{U_n^2} \Leftrightarrow V_nU_n^2 = U_n^2-1 \Leftrightarrow U_n^2(V_n-1) = -1 \Leftrightarrow U_n^2 = \frac{-1}{V_n-1} \Leftrightarrow U_n = \sqrt{\frac{1}{1-V_n}} \Leftrightarrow U_n = \sqrt{\frac{1}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}}$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}} = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{1}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}} = \sqrt{1} = 1$ ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1$

EXERCICE 15 : 1) a) On a : $0 \le U_0 < 1$; supposons que $0 \le U_p < 1$; $p \in IN$ et montrons que $0 \le U_{p+1} < 1$. Puisque $U_p \ge 0$ il est évident que $U_{p+1} \ge 0$. On a :

$(U_p+2)^2 = U_p^2+4U_p+4 < U_p^2+8$ (car $U_p<1$) $\Leftrightarrow U_p+2 = \sqrt{U_p^2+8}$ donc $\frac{U_p+2}{\sqrt{U_p^2+8}} < 1$

Conclusion : d'après le principe de raisonnement par récurrence On a $\forall n \in IN$; $0 \le U_n < 1$

b) On a $U_n^2+8 \le 9 \Rightarrow \sqrt{U_n^2+8} \le 3 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{U_n^2+8}} \ge \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{U_n+2}{\sqrt{U_n^2+8}} \ge \frac{U_n+2}{3}$ donc $U_{n+1} \ge \frac{U_n+2}{3}$; $n \in IN$

c) On a $U_{n+1} \ge \frac{U_n+2}{3} \Leftrightarrow U_{n+1}-U_n \ge \frac{2}{3}(1-U_n) \ge 0$ car $U_n<1$; $\forall n \in IN$ donc (U_n) est croissante

2) a) On a $U_{n+1} \ge \frac{U_n+2}{3} \Leftrightarrow -U_{n+1} \le -\frac{2}{3}-\frac{U_n}{3} \Leftrightarrow 1-U_{n+1} \le 1-\frac{2}{3}-\frac{U_n}{3}$ $1-U_{n+1} \le \frac{1}{3}(1-U_n)$

$$\left.\begin{array}{l} 1-U_n \le \frac{1}{3}(1-U_{n-1}) \\ 1-U_{n-1} \le \frac{1}{3}(1-U_{n-2}) \\ \text{b)}\ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ 1-U_1 \le \frac{1}{3}(1-U_0) \end{array}\right\} \text{n termes}$$

$(1-U_n)(1-U_{n-1})\ldots\ldots(1-U_1) \le \left(\frac{1}{3}\right)^n (1-U_{n-1})(1-U_{n-2})\ldots\ldots(1-U_0)$ donc $1-U_n \le \left(\frac{1}{3}\right)^n (1-U_0) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

c) $0 < 1-U_n \le \left(\frac{1}{3}\right)^n$ puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-U_n) = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1$

3) a) $1-U_n \le \left(\frac{1}{3}\right)^n \Leftrightarrow U_n \ge 1-\left(\frac{1}{3}\right)^n$ donc $\sum\limits_{k=0}^{n-1} U_k \ge \sum\limits_{k=0}^{n-1} 1 - \sum\limits_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^k \ge n - \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} \ge n - \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}}$

$\ge n - \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$ ($\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^k$ la somme de n termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$)

b) On a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[n - \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)\right] = +\infty - \frac{3}{2} = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$

EXERCICE 16 : 1) a) On a $\forall k \in \{0;1;2;\ldots\ldots;2n+1\}$;

$n^2 \le n^2+k \le n^2+2n+1 \Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)^2} \le \frac{1}{n^2+k} \le \frac{1}{n^2} \Leftrightarrow \frac{n}{(n+1)^2} \le \frac{n}{n^2+k} \le \frac{1}{n}$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{k=0}^{2n+1}\frac{n}{(n+1)^2} \le \sum\limits_{k=0}^{2n+1}\frac{n}{n^2+k} \le \sum\limits_{k=0}^{2n+1}\frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{n(2n+2)}{(n+1)^2} \le U_n \le \frac{2n+2}{n} \Leftrightarrow \frac{2n}{n+1} \le U_n \le \frac{2(n+1)}{n}$

b) On a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n}{n+1} = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2(n+1)}{n} = 2$ donc la suite (U_n) est convergente et on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 2$.

2) On a : $\sqrt{n}+\sqrt{n-1} \le 2n ; n \in IN^* \Leftrightarrow \frac{1}{2n} \le \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} \Leftrightarrow \frac{1}{2n} \le \sqrt{n}-\sqrt{n-1}$.

On a :

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2n} \le \sqrt{n}-\sqrt{n-1} \\ \frac{1}{2(n-1)} \le \sqrt{n-1}-\sqrt{n-2} \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ \frac{1}{2} \le \sqrt{1}-\sqrt{0} \end{array}\right\} \text{On effectue la somme on obtient :}$$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots\ldots+\frac{1}{2n} \le \sqrt{n}-\sqrt{n-1}+\sqrt{n-1}+\sqrt{n-2}+\ldots\ldots+\sqrt{1}-\sqrt{0} \Leftrightarrow \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots\ldots+\frac{1}{2n} \le \sqrt{n}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\ldots+\frac{1}{n}\right) \le \sqrt{n} \Leftrightarrow 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\ldots+\frac{1}{n} \le 2\sqrt{n}$

3) $S_n = U_1+U_2+\ldots\ldots+U_n$

a) On a : $\frac{2k}{k+1} \le U_k \le \frac{2k+2}{k} \Leftrightarrow 2-\frac{2}{k+1} \le U_k \le 2+\frac{2}{k} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} 2-2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} \le \sum_{k=1}^{n} U_k \le \sum_{k=1}^{n} 2+2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

$\Leftrightarrow 2n-2\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+.....+\frac{1}{n+1}\right) \le S_n \le 2n+2\left(1+\frac{1}{2}+....+\frac{1}{n}\right)$

b) D'après 2°) On a : $1+\frac{1}{2}+.....+\frac{1}{n} \le 2\sqrt{n} \Leftrightarrow 1+\frac{1}{2}+.....+\frac{1}{n+1} \le 2\sqrt{n+1}$ d'où

$2n+2\left(1+\frac{1}{2}+.....+\frac{1}{n}\right) \le 2n+4\sqrt{n}$

et $-4\sqrt{n+1} \le -2\left(\frac{1}{2}+....+\frac{1}{n+1}\right) \Leftrightarrow 2n-4\sqrt{n+1} \le 2n-2\left(\frac{1}{2}+....+\frac{1}{n+1}\right)$ ainsi $2n-4\sqrt{n+1} \le S_n \le 2n+4\sqrt{n}$

c) $2-\frac{4\sqrt{n+1}}{n} \le \frac{S_n}{n} \le 2+\frac{4\sqrt{n}}{n}$. On a $\lim_{n\to+\infty}\frac{4\sqrt{n+1}}{n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{4\sqrt{n}}{n} = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n} = 2$.

Exercice N° 17 : 1) a) Soit $n \ge 1$. Pour tout entier k tel que $1 \le k \le n$; $\frac{1}{\sqrt{k}} \ge \frac{1}{\sqrt{n}}$ Or $U_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$ (une somme de n termes) $\Rightarrow U_n \ge n\times\frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow U_n \ge \sqrt{n}$.

b) $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n} = +\infty$ et $U_n \ge \sqrt{n}; n \ge 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

2) Soit $n \ge 1$; $V_n = \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k}} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k}}$. Pour $n+1 \le k \le 2n$; $\frac{1}{\sqrt{k}} \ge \frac{1}{\sqrt{2n}}$

$\Rightarrow V_n \ge \frac{n}{\sqrt{2n}} \Rightarrow V_n \ge \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}$ Comme $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} V_n = +\infty$

Exercice 18 : $U_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{n^2+k}}$; $n \in \mathbb{N}^*$

1) $U_1 = \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{1^2+k}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $U_2 = \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{2^2+k}} = \frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{5}}{5}+\frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{3\sqrt{5}+5\sqrt{6}}{15}$.

2)a) pour $k \in \{1,2,\ldots,n\}$ on a : $\frac{k}{\sqrt{n^2+k}} \ge \frac{k}{\sqrt{n^2+n}}$ (car $\sqrt{n^2+n} \ge \sqrt{n^2+k} \Rightarrow \frac{k}{\sqrt{n^2+k}} \ge \frac{k}{\sqrt{n^2+n}}$). $\Rightarrow$

$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{n^2+k}} \ge \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{n^2+n}} \Rightarrow U_n \ge \frac{1+2+...+n}{\sqrt{n^2+n}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

b) On a $1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow \frac{1+2+...+n}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{n^2+n}{2\sqrt{n^2+n}}$, $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+n}{2\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n(n+1)}{2n\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = +\infty$

Comme $U_n \ge \frac{n^2+n}{2\sqrt{n^2+n}} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$.

3)a) On remarque que $k \in \{1,2,\ldots,n\}$, on a $\frac{k}{\sqrt{n^2+k}} \le \frac{k}{\sqrt{n^2+1}}$ (car $\sqrt{n^2+k} \ge \sqrt{n^2+1}$) $\Rightarrow$

$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{n^2+k}} \le \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{n^2+1}} \Rightarrow U_n \le \frac{1+2...+n}{\sqrt{n^2+1}} \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2\sqrt{n^2+n}} \le U_n \le \frac{n(n+1)}{2\sqrt{n^2+1}}$

$\Rightarrow \frac{(n+1)}{2\sqrt{n^2+n}} \le \frac{1}{n}U_n \le \frac{(n+1)}{2\sqrt{n^2+1}}$.

b) $\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)}{2\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n(1+\frac{1}{n})}{2n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{2}$ et $\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)}{2\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n(1+\frac{1}{n})}{2n\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{1}{2}$.

Conclusion : la suite de terme général $\frac{1}{n}U_n$ est convergente et $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}U_n = \frac{1}{2}$.

Exercice N° 19 : 1) a) Soit $n \ge 1$; $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+2)\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{(n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n}} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$ Or $1+\frac{1}{n+1} \le 2 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{2}{3}$

$\Rightarrow a_{n+1} \le \frac{2}{3}a_n$

b) $a_1 = 2\times\frac{1}{3} \le \left(\frac{2}{3}\right)^1$; Soit $n \in IN^*$ supposons que $a_n \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$ et montrons que $a_{n+1} \le \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$:

$a_{n+1} \le \frac{2}{3}a_n$ et $\frac{2}{3}a_n \le \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ **Conclusion :** Pour tout $n \ge 1$; $a_n \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$

on a : $a_n \ge 0$ pour tout $n \ge 1 \Rightarrow 0 \le a_n \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$. or $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

2) a) f est dérivable en tout réel x et $f'(x) = 1+2x+...+nx^{n-1} \Rightarrow U_n = f'\left(\frac{1}{3}\right)$

b) Si $x \ne 1 \Rightarrow f(x) = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ (Puisque $f(x)$ est la somme de $(n+1)$ termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $x \ne 1$) Par conséquent pour $x \ne 1$,

$f'(x) = \frac{(n+1)x^{n+1}-(n+1)x^n-x^{n+1}+1}{(x-1)^2} \Rightarrow U_n = \frac{9}{4}\left((n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}-(n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}+1\right)$

$= \frac{9}{4}\left(\frac{1}{3}a_n-a_n-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}+1\right) = \frac{9}{4}\left(1-\frac{2}{3}a_n-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{9}{4}$.

Exercice 20:Rappel : Soit α, β et γ trois réels tel que $\alpha+\beta+\gamma \ne 0$

Si G le barycentre des points pondérés $(A,\alpha),(B,\beta)$ et $(C,\gamma) \Rightarrow$ pour tout point M du plan

$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$

1)a). G_1 est le barycentre des points pondérés $(0,2),(A,1)$ et $(B,1)$

$\Rightarrow 4\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ or $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=6\vec{i}+2\vec{j} \Rightarrow G_1\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$

G_2 est le barycentre des points pondérés $(G_1,2),(A,1)$ et $(B,1)$

$\Rightarrow 4\overrightarrow{OG_2}=2\overrightarrow{OG_1}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ or $2\overrightarrow{OG_1}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=9\vec{i}+3\vec{j} \Rightarrow G_2\left(\frac{9}{4},\frac{3}{4}\right)$

. G_3 est le barycentre des points pondérés $(G_2,2),(A,1)$ et $(B,1)$

b) $\overrightarrow{G_1G_2}\begin{pmatrix}\frac{3}{4}\\ \frac{1}{4}\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{G_2G_3}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{G_2G_3}=4\overrightarrow{G_1G_2} \Rightarrow \overrightarrow{G_2G_3}$ et $\overrightarrow{G_1G_2}$ sont colinéaires $\Rightarrow$ les points

G_1, G_2 et G_3 sont alignés.

2) Soit $n \geq 0$ G_{n+1} est le barycentre des points pondérés

$(G_n,2),(A,1)$ et $(B,1) \Rightarrow 2\overrightarrow{G_{n+1}G_n}+\overrightarrow{G_{n+1}A}+\overrightarrow{G_{n+1}B}=\vec{0}$ (I)

Posons I =A*B L'inégalité vectoriel (I) devienne : $\overrightarrow{G_{n+1}G_n}+\overrightarrow{G_{n+1}I}=\vec{0} \Rightarrow G_{n+1}=G_n*I \Rightarrow G_{n+1}$ est limage de G_n par l'homothétie de centre I et de rapport $\frac{1}{2}$

3) Les coordonnées de I sont $(3,1)$

$\Rightarrow \overrightarrow{IG_{n+1}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{IG_n} \Rightarrow x_{n+1}-x_I=\frac{1}{2}(x_n-x_I) \Rightarrow x_{n+1}=\frac{1}{2}x_n-\frac{1}{2}x_I \Rightarrow x_{n+1}=\frac{1}{2}x_n+\frac{3}{2}$

4)a) $G_1\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right) \Rightarrow x_1=\frac{3}{2}=\frac{3}{2^1}$

. Soit $n \geq 1$ supposons que $x_n=\frac{3}{2}+\frac{3}{2^2}+...+\frac{3}{2^n}$ et montrons que $x_{n+1}=\frac{3}{2}+\frac{3}{2^2}+...+\frac{3}{2^{n+1}}$

$*\frac{1}{2}x_n+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{2^2}+...+\frac{3}{2^n}\right)+\frac{3}{2}=\frac{3}{2^2}+\frac{3}{2^3}+....+\frac{3}{2^{n+1}}+\frac{3}{2}=x_{n+1}$

Conclusion :pour tout $n \geq 1$, $x_n=\frac{3}{2}+\frac{3}{2^2}+...+\frac{3}{2^n}$

b) $x_n=3\underbrace{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}\right)}_{\text{somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de raison }\frac{1}{2}}=3\times\frac{1}{2}\times\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=3\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$. c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}=0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0$

Exercice N° 21 : 1) a) Soit $n \geq 1$. Pour tout entier naturel k tel que $1 \leq k \leq n$, on a

$\frac{1}{2n} \leq \frac{1}{n+k} \leq \frac{1}{n+1} \Rightarrow n\times\frac{1}{2n} \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} \leq n\times\frac{1}{n+1} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} \leq \frac{n}{n+1}$

b) Soit $n \geq 1$ D'après la question précédente $\frac{1}{2n} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} \leq \frac{1}{n+1} \Rightarrow \frac{1}{2n} \leq a_n \leq \frac{1}{n+1}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2n}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$.

2) a) Soit $u : x \mapsto \sin x - x$; u est dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et $u'(x)=\cos x-1; x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$; Comme $u'(x) \leq 0 \Rightarrow u$ est décroissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ en plus $u(0)=0 \Rightarrow$ pour tout réel $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$; $u(x) \leq 0 \Rightarrow \sin x \leq x; x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

b) Soit $v : x \mapsto 1-\frac{x^2}{2}-\cos x; x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$; $v'(x)=-x+\sin x=u(x) \Rightarrow$ v est décroissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

$v(0)=0 \Rightarrow v(x) \leq 0; x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow 1-\frac{x^2}{2} \leq \cos x; x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

3) Soit $n\in IN^*$ et k un entier tel que $1 \leq k \leq n \Rightarrow n+k \geq 2$ et $\frac{1}{\sqrt{n+k}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Or $\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow 1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right)^2 \leq \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right) \leq 1 \Rightarrow 1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+k}\right) \leq \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right) \leq 1$

$\Rightarrow \quad n-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n+k}\right) \leq \sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right) \leq n \Rightarrow 1-\frac{1}{2}a_n \leq U_n \leq 1$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}U_n=1$.

Exercice22 : 1) Pour $n=k$, on a : $\frac{k^k}{k!} \leq \frac{k^k}{k!}$ vraie ,supposons que $\frac{k^n}{n!} \leq \frac{k^k}{k!}$ $\forall$ $n \geq k$ et montrons que

$\frac{k^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{k^k}{k!}$. ; on a : $\frac{\frac{k^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{k^n}{n!}}=\frac{k^{n+1}}{k^n}\times\frac{n!}{(n+1)!}=\frac{k}{n+1}$ Or on a : $n \geq k \Rightarrow n+1 \geq k \Rightarrow \frac{k}{n+1} \leq 1$ donc

$\frac{\frac{k^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{k^n}{n!}} \leq 1 \Rightarrow \frac{k^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{k^n}{n!}$. Or on a : d'après l'hypothèse de récurrence $\frac{k^n}{n!} \leq \frac{k^k}{k!}$ $\forall n \geq k \Rightarrow \frac{k^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{k^k}{k!}$

Donc d'après le principe de récurrence : $\frac{k^n}{n!} \leq \frac{k^k}{k!}$ $\forall n \geq k$

2) $\forall n \geq k$ on a : $\frac{x^n}{n!} = \left(\frac{x}{k}\right)^n \frac{k^n}{n!}$ or d' après 1) $\frac{k^n}{n!} \leq \frac{k^k}{k!} \forall n \geq k \Rightarrow \frac{x^n}{n!} \leq \left(\frac{x}{k}\right)^n \frac{k^k}{k!}$

3) On a : $0 \leq x < k \Rightarrow 0 \leq \frac{x}{k} < 1 \Rightarrow 0 \leq \left(\frac{x}{k}\right)^n < 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{x}{k}\right)^n = 0$ or $0 \leq \frac{x^n}{n!} \leq \left(\frac{x}{k}\right)^n \frac{k^k}{k!}$;

$0 \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!} \leq \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{x}{k}\right)^n \frac{k^k}{k!} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$.

Exercice 23: 1) Démontrons par récurrence ; pour $n = 2$, on a : $\frac{2^{2-1}}{2!} = \frac{2}{2} = 1 \geq 1$ supposons

que $\frac{n^{n-1}}{n!} \geq 1 \forall n \geq 2$ et montrons que $\frac{(n+1)^n}{(n+1)!} \geq 1$. On a : $\frac{\frac{(n+1)^n}{(n+1)!}}{\frac{n^{n-1}}{n!}} = \frac{(n+1)^n}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^{n-1}} = \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}} \frac{1}{(n+1)}$

$= \frac{(n+1)^n}{n+1} \frac{1}{n^{n-1}} = \frac{(n+1)^{n-1}}{n^{n-1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-1} \geq 1 \ \forall n \geq 2$ car $\frac{n+1}{n} \geq 1$ d'où $\frac{(n+1)^n}{(n+1)!} \geq \frac{n^{n-1}}{n!} \geq 1 \Rightarrow \frac{(n+1)^n}{(n+1)!} \geq 1$

2) On a : $\frac{n^{n-1}}{n!} \geq 1 \forall n \geq 2 \Rightarrow n\left(\frac{n^{n-1}}{n!}\right) \geq n \Rightarrow \frac{n^n}{n!} \geq n$; $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$

Exercice 24 : 1)(U_n est constante) signifie (pour tout n de $\mathbb{N}$ $U_n = U_0$) signifie $\begin{cases} \textit{pour } n \text{ de } \mathbb{N} \textit{ on a}: \\ U_n = U_0 \\ U_{n+1} = U_0 \end{cases}$

signifie $\begin{cases} \textit{pour } n \text{ de } \mathbb{N} \textit{ on a}: \\ U_n = U_0 \\ U_0 = U_0^2 + 2U_0 \end{cases}$ signifie $\begin{cases} \textit{pour } n \text{ de } \mathbb{N} \textit{ on a}: \\ U_n = U_0 \\ U_0(U_0+1) = 0 \end{cases}$ signifie $\begin{cases} \textit{pour } n \text{ de } \mathbb{N} \textit{ on a}: \\ U_0 = 0 \\ U_n = 0 \end{cases}$

ou $\begin{cases} \textit{pour } n \text{ de } \mathbb{N} \textit{ on a}: \\ U_0 = -1 \\ U_n = -1 \end{cases}$ Conclusion : la suite (U_n) est constante signifie U_0=0 ou U_0=-1.

2) U_0>0.

a) Démontrons par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$ U_n>0, U_0>0 donnée, soit n$\in \mathbb{N}$ supposons que U_n>0 montrons que U_{n+1}>0 or $U_{n+1} = U_n^2 + 2U_n > 0$ (somme de 2 nombres positifs), pour tout n de $\mathbb{N}$ on a : U_n>0.

b) pour tout n de $\mathbb{N}$ $U_{n+1} - U_n = U_n^2 + U_n \geq 0$ donc (U_n) est croissante.

$U_{n+1} - U_n(U_0+2) = U_n^2 + 2U_n - U_n(U_0+2) = U_n[(U_n+2) - (U_0+2)] = U_n(U_n - U_0) \geq 0$ Car U_n>0 et $U_n \geq U_0$ Car (U_n) est croissante. Montrons par récurrence que : $U_n \geq U_0(U_0+2)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

*$U_0 \geq U_0(U_0+2)^0$ vraie ($U_0 \geq U_0$), soit n$\in \mathbb{N}$ supposons $U_n \geq U_0(U_0+2)^n$ et montrons

$U_{n+1} \geq U_0(U_0+2)^{n+1}$ or $U_{n+1} \geq U_n(U_0+2) \geq U_0.(U_0+2)^n.(U_0+2)$, $U_{n+1} \geq U_0.(U_0+2)^{n+1}$.

Conclusion : pour tout n de $\mathbb{N}$ on a : $U_{n+1} \geq U_0.(U_0+2)^{n+1}$.

$U_0 + 2 \geq 2$ d'où $\lim_{n\to+\infty} (U_0+2)^n = +\infty$ (limite de suite géométrique de raison q=(U_0 + 2) > 1 et de 1er terme 1) et comme $U_n \geq U_0(U_0+2)^n$ alors $\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$.

3)a) $V_{n+1} = U_{n+1} + 1 = U_n^2 + 2U_n + 1 = (U_n+1)^2 = V_n^2$, montrons par récurrence que : $V_n = (1+U_0)^{2^n}$.

*$V_0 = (1+U_0)^{2^0} = 1 + U_0$ vraie, soit n$\in \mathbb{N}$ que $V_n = (1+U_0)^{2^n}$ et montrons que $V_{n+1} = (1+U_0)^{2^{n+1}}$ or $V_{n+1} = V_n^2$

$V_{n+1} = V_n^2 = \left[(1+U_0)^{2^n}\right]^2 = (1+U_0)^{2\times 2^n} = (1+U_0)^{2^{n+1}}$.

Conclusion : pour tout n de $\mathbb{N}$ $V_n = (1+U_0)^{2^n}$ or $V_n = 1 + U_n$ d'où $U_n = V_n - 1 = (1+U_0)^{2^n} - 1$.

b) On rappelle que (q^n) converge signifie -1<q<1 signifie (U_n)converge signifie $(1+U_0)^{2^n}$ converge.

*si -1<1+U_0 ≤ 1 : signifie -2<U_0 ≤0 et si -2<U_0<0 alors -1<U_0+1<1 d'où $\lim_{n\to+\infty} (1+U_0)^{2^n} = 0$ et par suite $\lim_{n\to+\infty} U_n = -1$, si $U_0 = 0$ la suite (U_n) est constante d'où $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$.

4) $U_0 = 1$ et $t_n = \frac{1}{1+U_n}$; $n \in \mathbb{N}$ $t_n = \frac{1}{1+2^{2^n}-1} = \frac{1}{2^{2^n}}$, montrons que $2^n \geq n$, par récurrence : si n=1 on a 2^1=2≥1 vraie, soit n$\in \mathbb{N}$*, supposons que $2^n \geq n$ et montrons que $2^{n+1} \geq n+1$, $2^n \geq n$ donc $2\times 2^n \geq 2\times n \geq$n+1 donc $2^{n+1} \geq n+1$, pour n=0 l'inégalité est vraie. Donc $2^n \geq n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

$2^n \geq n$ alors $\frac{1}{2^{2n}} \leq \frac{1}{2^n}$ d'où $0 \leq t_n \leq \frac{1}{2^n}$.

b) $S_n = \sum_{k=0}^{k=n+1} t_k$; n$\in \mathbb{N}$* $S_{n+1} = S_n + t_n$ d'où $S_{n+1} - S_n = t_n \geq 0$ donc S_n est croissante.

$0 \leq t_n \leq \frac{1}{2^k}$ alors $\sum_{k=0}^{k=n-1} t_k \leq \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{1}{2^k}$ or $S_{n+1} = \sum_{k=0}^{k=n-1} t_k \leq \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{1}{2^k} = 1\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{(1-\frac{1}{2})} = 2(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n) = 2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ or

$S_n \geq S_1$ (car S_n est croissante) et $S_1 = 1$.

Exercice 25 $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{\sqrt{3U_n+1}} \end{cases}$ $n \in \mathbb{N}$* et $f(x) = \frac{x}{\sqrt{3x+1}}$, on remarque que f est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

1)a) Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$ $0 \leq U_n \leq 1$, $0 \leq U_0 \leq 1$ bien, soit $\forall n \in \mathbb{N}$ supposons que $0 \leq U_n \leq 1$

$f(0) \leq f(U_n) \leq f(1) \Rightarrow 0 \leq U_{n+1} \leq \frac{1}{2} \leq 1$, Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$ $0 \leq U_n \leq 1$.

et montrons $0 \le U_{n+1} \le 1$ or f est croissante sur $\left]-\frac{1}{3},+\infty\right[$ on particulier sur $[0,1]$ d'où

b) $U_{n+1}^2 - U_n^2 = \frac{u_n^2}{3U_n+1} - U_n^2 = U_n^2\left(\frac{-3U_n}{1+3U_n}\right) \le 0 \Rightarrow U_{n+1}^2 \le U_n^2$ et comme U_n et U_{n+1} sont positifs $\Rightarrow U_n \ge U_{n+1}$.

Conclusion : la suite U est décroissante.

2)a) $f(\frac{1}{n}) = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{3}{n}+1}} = \frac{1}{\sqrt{n(n+3)}}$ on remarque que $f(\frac{1}{n})$ est positif pour montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*\ f(\frac{1}{n}) \le \frac{1}{n+1}$ il

suffit de montrer que $f^2(\frac{1}{n}) \le \frac{1}{(n+1)^2}$ ce qui revient à démontrer que $n(3+n) \ge (n+1)^2$,

$n(3+n)-(n+1)^2 = n-1 \ge 0$ d'où $\forall n \in \mathbb{N}^*\ f(\frac{1}{n}) \le \frac{1}{n+1}$.

b)* $U_0 = 1 \quad 0 \le U_0 \le 1$ vrai, soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $U_n \le \frac{1}{n+1}$ et montrons que $U_{n+1} \le \frac{1}{n+2}$ or

$U_n \le \frac{1}{n+1}$ et f est croissante sur $[0,+\infty[$ d'où : $f(\frac{1}{n}) \le f(\frac{1}{n+1}) \le \frac{1}{n+2}$ d'où $U_{n+1} \le \frac{1}{n+2}$.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n \le \frac{1}{n+1}$.

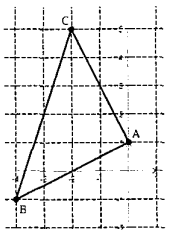
3)a) $\varphi(x) = \frac{3}{1+\sqrt{3x+1}}$, $\varphi(x)' = 3\frac{-\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}}{(1+\sqrt{3x+1})^2}$ d'où φ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

$$\frac{1}{U_{n+1}} - \frac{1}{U_n} = \frac{\sqrt{3U_n+1}}{U_n} - \frac{1}{U_n} = \frac{1}{U_n}(\sqrt{3U_n+1}-1) = \frac{1}{U_n}\frac{(\sqrt{3U_n+1}-1)(\sqrt{3U_n+1}+1)}{\sqrt{3U_n+1}+1} = \frac{1}{U_n} \times \frac{3U_n}{1+\sqrt{3U_n+1}}$$

$= \frac{3}{1+\sqrt{3U_n+1}} = \varphi(U_n)$. Or $0 \le U_n \le \frac{1}{n+1}$ d'où $\varphi(\frac{1}{n+1}) \le \varphi(U_n) \le \varphi(0)$, $\varphi(\frac{1}{n+1}) \le \frac{1}{U_{n+1}} - \frac{1}{U_n} \le \frac{3}{2}$.

Exercicen°1: I) $z = \frac{(2-i)(1+3i)}{-2+3i} = \frac{2+6i-i+3}{-2+3i} = \frac{5+5i}{-2+3i} = \frac{(5+5i)(-2-3i)}{(-2+3i)(-2-3i)} = \frac{-10-15i-10i+15}{(-2)^2+(-3)^2}$

$= \frac{5-25i}{13} = \frac{5}{13} - i\frac{25}{13}$



II) Voir figure :

1) $AB = z_B - z_A = |-4-i-i| = |-4-2i| = \sqrt{(-4)^2+(-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$AC = z_C - z_A = |-2+5i-i| = |-2+4i| = \sqrt{(-2)^2+4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$BC = z_C - z_B = |-2+5i+4+i| = |2+6i| = \sqrt{2^2+6^2} = \sqrt{40} = 4\sqrt{10}$

$AB = AC$ et $BC^2 = AB^2 + AC^2$. Donc ABC est rectangle et isocèle

2) $\Delta = \{M(z); |z-i| = |z+4+i|\}$

$M(z) \in \Delta \Leftrightarrow |z-i| = |z+4+i| \Leftrightarrow |z-i| = |z-(-4-i)| \Leftrightarrow |z_M - z_A| = |z_M - z_B| \Leftrightarrow MA = MB \Leftrightarrow M \in med[AB]$ **I**

II) $(z^2-4)(z^2+9) = 0 \Leftrightarrow z^2-4$ ou $z^2+9 \Leftrightarrow z^2 = 4$ ou $z^2 = -9$

$\Leftrightarrow z = 2$ ou $z = -2$ / $z = 3i$ ou $z = -3i \Rightarrow S_C = \{2,-2,3i,-3i\}$

Exercice N° 2: 1) Faux : $i^{1010} = (i^2)^{505} = (-1)^{505} = -1$;

2) Faux : $z = 1-i$ et $z' = 1+i$ on a : $z^2 = -2i$ et $(z')^2 = 2i$ et $z^2 + (z')^2 = 0$

3) Vrai : $M \in \zeta \Leftrightarrow |z| = 1$ donc $|z'| = \left|\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1$

On désigne par M et M' les points d'affixes respectives z et $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$; si $M \in \xi$ alors $M' \in \xi$

4) Vrai car si $z = 222+222i$ alors $z' = 222-222i$; $\left|\frac{222+222i}{222-222i}\right| = \frac{|z|}{|\bar{z}|} = 1$

5) Vrai 6) Faux ; contre exemple : $z_1 = 1$ et $z_2 = i$; $z_1^2 + z_2^2 = 1^2 + i^2 = 1-1 = 0$

7) Faux. En effet on a : $\frac{1}{\cos\frac{2\pi}{5}}\left(\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}\right) = 1 + i\tan\frac{2\pi}{5} \ne 1 + i\tan\frac{3\pi}{5}$.

8) Faux , 9) Vrai $\frac{1}{Z} - \frac{1}{\bar{Z}} = \frac{\bar{Z}-Z}{Z\bar{Z}} = \frac{(a-ib)-(a+ib)}{|Z|^2} = \frac{-2ib}{|Z|^2} \in iIR$

10) Faux. En effet on a : $OA = 1$ car $A \in \xi_{(O,1)}$ et Si B est le milieu du segment [OA] alors $OB = \frac{1}{2}OA = \frac{1}{2}$

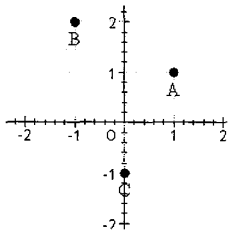
or on a : $OB = \left|\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{4}i\right| = \sqrt{\frac{2}{16}+\frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \neq \frac{1}{2}$

Exercice N°3 : 1) Voir figure

2) $AB = |z_B - z_A| = |-1+2i-1-i| = |-2+i| = \sqrt{5}$

$AC = |z_C - z_A| = |-i-1-i| = |-1-2i| = \sqrt{5}$

$BC = |z_C - z_B| = |-i+1-2i| = |-3i+1| = \sqrt{10}$



Puisque $AB = AC$; $AB^2 + AC^2 = BC^2$ alors d'après le théorème de Pythagore ABC est un triangle isocèle et rectangle en A

3) ABCD est un parallélogramme signifie que : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ signifie $z_C - z_A = z_D - z_B$ signifie que $z_D = z_C - z_A + z_B = -i-1-i-1+2i = -2$

4) a) $|z+i| = 2$ signifie $|z-(-i)| = 2$ signifie $MC = 2$ donc M appartient à un cercle de centre C et de rayon 2 donc $E = \zeta_{(C;2)}$

b) $|2iz+2i+4| = 2|z+i|$ signifie $\left|2i(z+1)+4\right| = 2|z+i|$ signifie $\left|2i\left(z+1+\frac{4}{2i}\right)\right| = 2|z+i|$

signifie $|2i|\left|z+1+\frac{4}{2i}\right| = 2|z+i|$ signifie $\left|z+1-\frac{4i}{2}\right| = |z+i|$ signifie $|z+1-2i| = |z+i|$ signifie

$|z-(-1+2i)| = |z-(-i)|$ signifie que $BM = CM$ signifie que M décrit la médiatrice de $[BC]$ donc $F = \text{méd}([BC])$.

5) $M(z) \mapsto M'(z')$ tel que $z' = \frac{z+1-2i}{z-1-i}$.

a) $z_A = 1+i$; $\frac{z_C+1-2i}{z_C-1-i} = \frac{-i+1-2i}{-i-1-i} = \frac{1-3i}{-(1+2i)} = \frac{(1-3i)(1-2i)}{-5} = \frac{1-2i-3i-6}{-5} = \frac{-5-5i}{-5}$

$= \frac{-5(1+i)}{-5} = 1+i = z_A$. On a : $z_A = \frac{z_C+1-2i}{z_C-1-i}$ donc $f(C) = A$.

b) $(z'-1)(z-1-i) = \left(\frac{z+1-2i}{z-1-i}-1\right)(z-1-i) = (z+1-2i-z+1+i) = 2-i$.

c) $M \in \zeta_{(A;1)}$ signifie que $|z-1-i| = 1$ donc $|(z'-1)(z-1-i)| = |2-i|$ signifie que $|z'-1| = |2-i| = \sqrt{5}$.

$IM' = \sqrt{5}$ Soit I le point d'affixe 1 donc $M' \in \zeta_{(I;\sqrt{5})}$.

d) $M \in \text{méd}([AB])$ signifie que $AM = BM \Leftrightarrow |z-z_A| = |z-z_B| \Leftrightarrow |z-1-i| = |z+1-2i|$

donc $|z'| = \frac{|z+1-2i|}{|z-1-i|} = 1$ ainsi $M' \in \zeta''_{(O;1)}$.

EXERCICE N°4: a) $M'(i+m)$; $M''(i-m)$ et $A(i)$.

On a $\frac{z_{M'}+z_{M''}}{2} = \frac{i+m+i-m}{2} = 1 = z_A$ donc $A = M'*M''$

b) $OM'' = |z_{M''}| = |i-m| = \sqrt{1+m^2}$ donc $OM' = OM''$ et par suite le triangle $OM'M''$ est isocèle de sommet principal O.

c) $OM'M''$ est équilatéral si et seulement si $OM' = OM'' = M'M''$. On a : $M'M'' = |i-m-i-m| = |2m|$;

$\sqrt{1+m^2} = |2m| \Leftrightarrow 1+m^2 = 4m^2 \Leftrightarrow 3m^2 = 1 \Leftrightarrow m^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow m = \sqrt{\frac{1}{3}}$ ou $m = -\sqrt{\frac{1}{3}} \Rightarrow m = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ou

$m = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ donc $OM'M''$ est équilatéral si et seulement si $m = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ou $m = \frac{\sqrt{3}}{3}$

EXERCICE N°5: a) On a : $A(2i)$; $B(-i)$; $M(-i+d)$ et $N(-i-d)$; $MN = |-i+d+i+d| = |2d| = 2|d| = 4$

$\frac{z_M+z_N}{2} = -i = z_B \Rightarrow B = M*N$

b) $BM = BN = |-i+d-(-i)| = |d| = 2$, $BN = |-i-d-(-i)| = |-d| = |d| = 2$ et par suite M et $N \in \xi_{(B;2)}$

c) $\text{aff}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}\right) = 2i+(-i+d)+(-i-d) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON} = \vec{0}$ donc lorsque AMN est un triangle alors O est son centre de gravité.

d) AMN est un triangle ; O est son centre de gravité et $B = M*N$; si AMN est isocèle alors $OM = ON$

$\Leftrightarrow |-i+d| = |-i-d| \Leftrightarrow |-i+d|^2 = |-i-d|^2 \Leftrightarrow (-i+d)(i+\bar{d}) = (i+d)(-i+\bar{d}) \Leftrightarrow d = \bar{d} \Leftrightarrow d \in IR$; $|d| = 2$

donc $d = -2$ ou $d = 2$

Exercice N° 6 : 1) $z_O = 0$; $z_A = -2+2i$; $z_I = \frac{z_O+z_A}{2} = -1+i$

2) $z_B = a+ib$, a) On a : $OB^2 = |z_B|^2 = BI^2 + OI^2 = \frac{3}{4}OA^2 + \frac{OA^2}{4} = OA^2 = |z_A|^2 = \left(\sqrt{4+4}\right)^2 = \left(\sqrt{8}\right)^2 = 8$

b) $B(a;b)$; $I(-1;1)$; $\text{aff}\left(\overrightarrow{BI}\right) = z_I - z_B = -1+i-a-ib = (-1-a)+i(1-b)$

c) $\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}-1-a\\1-b\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OI}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{OA} = 1+a+1-b = 2+a-b$

d) $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{OA} = 2+a-b = 0$ car $\overrightarrow{BI} \perp \overrightarrow{OA}$ donc $b-a = 2$ et on a : $a^2+b^2 = 8$

$\begin{cases} b = 2+a \\ a^2+b^2 = 8 \end{cases}$; $a^2+(2+a)^2 = 8$ signifie que $a^2+2a-2=0$; $\Delta = 12$;

$a_1 = -1-\sqrt{3}$; $a_2 = -1+\sqrt{3}$; $a_1 < 0$ donc on prend $a = -1+\sqrt{3} \simeq 0.71$

$b = 2+a = 1+\sqrt{3}$; $z_B = (-1+\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3})$.

3) OABC est un losange si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}$; aff $(\overrightarrow{AB})$ = aff $(\overrightarrow{OC})$ signifie que $z_B - z_A = z_C - z_O$

signifie que $z_C = z_B - z_A = -1+\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3})-(-2+2i) = -1+\sqrt{3}+i+\sqrt{3}i+2-2i = 1+\sqrt{3}+(-1+\sqrt{3})i$ donc

$z_c = 1+\sqrt{3}+(-1+\sqrt{3})i$

4) $\zeta = \{M \in P ; |iz+1+i| = \sqrt{2}\}$

a) $|iz+1+i| = |i||z+i-1| = |z-(-1+i)| = \sqrt{2}$ signifie que $MI = \sqrt{2}$ donc ζ est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{2}$

b) $\mathcal{A} = OA.BI$; $OA = \sqrt{8}$ et $BI = |z_I - z_B| = |-1+i+1-\sqrt{3}-i(1+\sqrt{3})| = |-\sqrt{3}+i\sqrt{3}| = \sqrt{6}$

$\mathcal{A} = \sqrt{8}\times\sqrt{6} = \sqrt{48} \simeq 6.8$; $\mathcal{A}' = \pi R^2 = 2\pi = 6.14 \Rightarrow \mathcal{A} > \mathcal{A}'$

Exercice7 : 1) voir figure

2) $M_1M_2 = |z_{M_2} - z_{M_1}| = |-2+i-1-2i| = |-3-i| = \sqrt{10}$

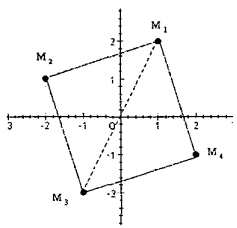
$M_2M_3 = |z_{M_3} - z_{M_2}| = |-1-2i+2-i| = |-1-3i| = \sqrt{10}$.

On a : $M_1M_2 = M_2M_3$ donc $M_1M_2M_3$ est un triangle isocèle.

$M_1M_3 = |z_{M_3} - z_{M_1}| = |-1-2i-1-2i| = |-2-4i| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$;

$M_1M_2^2 + M_2M_3^2 = M_1M_3^2 = 20$ donc $M_1M_2M_3$ est isocèle et rectangle en M_2.

c) $M_1M_2M_3M_4$ est un carré signifie



que $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_4M_3} \Leftrightarrow z_{M_3} - z_{M_4} = z_{M_2} - z_{M_1}$ signifie $z_{M_4} = z_{M_3} - z_{M_2} + z_{M_1}$ donc

$z_{M_4} = -1-2i+2-i+1+2i = 2-i$

II) 1) Supposons que $z = z_1 = 1+2i$ donc $z' = \dfrac{z_1-2i}{z_1+3} = \dfrac{1+2i-2i}{1+2i+3} = \dfrac{1}{4+2i} = \dfrac{4-2i}{20} = \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{10}i$

2) $z' \in IR$, soit $z = x+iy$ avec $(x;y) \in IR^2$ il faut que $z \neq -3$; $x \neq -3$ et $y \neq 0$ c'est-à-dire $M \neq A$; $A(-3)$

$z' = \dfrac{x+iy-2i}{x+iy+3} = \dfrac{x+i(y-2)}{x+3+iy} = \dfrac{(x+i(y-2))(x+3-iy)}{(x+3)^2+y^2} = \dfrac{x(x+3)-ixy+i(x+3)(y-2)+y(y-2)}{(x+3)^2+y^2}$

$= \dfrac{x(x+3)+y(y-2)}{(x+3)^2+y^2} + i\dfrac{(x+3)(y-2)-xy}{(x+3)^2+y^2} = \dfrac{x(x+3)+y(y-2)}{(x+3)^2+y^2} + i\dfrac{xy-2x+3y-6-xy}{(x+3)^2+y^2}$

$= \dfrac{x(x+3)+y(y-2)}{(x+3)^2+y^2} + i\dfrac{-2x+3y-6}{(x+3)^2+y^2}$. $z' \in IR \Leftrightarrow -2x+6y-6=0$; $-2(-3)+3\times 0-6=0$ alors

$A \in \Delta : -2x+3y-6=0 \setminus A(-3)$ donc E est la droite $\Delta : -2x+3y-6=0 \setminus A(-3)$.

Exercice N°8:

1) $OA = |z_A - z_O| = |z_A| = 2\sqrt{2}$; et $AB = |z_B - z_A| = |4i-2-2i| = |2i-2| = 2\sqrt{2}$

On a OA = AB donc OAB est isocèle en A. ; On a $OB = |z_B - z_O| = 4$;

$OA^2 + OB^2 = (2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 = 16 = OB^2$ don OAB est un triangle isocèle et rectangle en A.

2) a) $z_C = \dfrac{z_B}{z_A} = \dfrac{4i}{2+2i} = \dfrac{4i(2-2i)}{8} = \dfrac{8i+8}{8} = 1+i$

b) $\dfrac{z_O+z_A}{2} = \dfrac{2+2i}{2} = 1+i = z_C$ donc $C = O*A$

c) $E = \{M(z) \in P$ tel que : $|z-2-2i| = |z|\}$

$|z-2-2i| = |z|$ signifie que $AM = OM$ signifie sue M est équidistant de O et A signifie que $M \in$ méd$[OA]$.

donc $E =$ méd$([OA])$.

On a : $(OA) \perp (AB)$ et $(OA) \perp E$ donc $E // (AB)$

3) a) $z_D = z_B \times z_C = 4i(1+i) = 4i-4$

b) aff $(\overrightarrow{BD}) = 4i-4-4i = -4$; aff $(\overrightarrow{AB}) = 2i-2$. On a : $-4(2i-2) = -8i+8 \in iIR$ donc $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BD}$

$BD = |z_D - z_B| = 16$; $OA = 2\sqrt{2}$ on a $OA \neq BD$ et $(OA) // (BD)$ donc OABD est un trapèze.

4)a) $Z_K = \dfrac{Z_O+Z_D}{2} = \dfrac{Z_D}{2} = -2+2i$, $AK = |z_K - 2-2i| = |-2-2i-2i| = 2 \Rightarrow K \in F$.

b) $|z-2i| = 2 \Leftrightarrow |z-z_I| = 2 \Leftrightarrow IM = 2 \Leftrightarrow M \in \xi_{(I,2)}$

Exercice N9 : A) 1) $BC = |z_C - z_B| = |3+i-2-4i| = |1-3i| = \sqrt{10}$;

$AC = |z_C - z_A| = |3+i-2i| = |3-i| = \sqrt{10}$ On a BC = AC donc e traingle ABC est isocèle en C.

2) $D = S_{(AB)}(C)$; $I = A*B$. a) $z_I = \dfrac{z_A+z_B}{2} = \dfrac{2i+2+4i}{2} = \dfrac{2+6i}{2} = 1+3i$

b) ACBD est un parallélogramme signifie que $I = D*C$ signifie que $z_I = \frac{z_D + z_C}{2}$ signifie que $z_D = 2z_I - z_C = 2+6i-3-i = -1+5i$

B) $z' = iz+2$. 1) a) $z' = iz+2 = i(2+i)+2 = 2i-1+2 = 1+2i$

b) $z' = \frac{i}{1+i}+2 = \frac{i(1-i)}{2}+\frac{4}{2} = \frac{i+1+4}{2} = \frac{5}{2}+\frac{1}{2}i$

2) On pose $z = x+iy; (x;y) \in IR^2$;

$z' = iz+2$ signifie $z' = i(x+iy)+2 = ix-y+2$ $z' \in IR \Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow z = iy$ donc E est l'axe des imaginaire.

$|z'| = 3 \Leftrightarrow |iz+2| = 3 \Leftrightarrow |i(z-2i)| = 3 \Leftrightarrow |z-2i| = 3 \Leftrightarrow MA = 3$ Donc $F = \xi_{(A;3)}$ cercle de centre A et de rayon 3.

3) a)

$z' = \frac{-3i}{z} = iz+2 \Leftrightarrow iz^2+2z = -3i \Leftrightarrow -z^2+2iz = 3 \Leftrightarrow z^2-2iz = -3 \Leftrightarrow z^2-2iz+1-1 = -3 \Leftrightarrow (z-i)^2 = -4$

b) $z' = \frac{-3i}{z} \Leftrightarrow (z-i)^2 = -4 \Leftrightarrow (z-i)^2 = (2i)^2 \Leftrightarrow (z-i-2i)(z-i+2i) = 0 \Leftrightarrow z = 3i$ ou $z = -i$.

Exercice N°10:

:1) $H' = f(H)$, soit $z_{H'}$ l'affixe de H', on a donc $z_{H'} = \frac{z_H - i}{z_H - 2i} = \frac{i-i}{i-2i} = 0$ donc $z_{H'} = 0$

2) $|z'| = 1 \Leftrightarrow \frac{|z-i|}{|z-2i|} = 1 \Leftrightarrow |z-i| = |z-2i| \Leftrightarrow MH = MD$ donc $M \in$ méd([HD]) ainsi $E =$ méd([HD]).

3) a) $z \neq 2i$; $(z'-1)(z-2i) = \left(\frac{z-i}{z-2i}-1\right)(z-2i) = \left(\frac{z-i-z+2i}{z-2i}\right)(z-2i) = i$

b) On a : $(z'-1)(z-2i) = i$ signifie $|z'-1||z-2i| = |i|$ signifie que $KM'.DM = 1$ car $|z'-1| = KM'$ et $|z-2i| = DM$.

c) $M \in \xi_{(D;\frac{1}{3})} \Leftrightarrow DM = \frac{1}{3} \Leftrightarrow |z-2i| = \frac{1}{3} \Leftrightarrow DM = \frac{1}{3}$ et on a $KM'.DM = 1 \Leftrightarrow KM'.\frac{1}{3} = 1$ signifie que $KM' = 3$ donc $M' \in \xi_{(K;3)}$

EXERCICE N° 11: 1) a) voir figure

b) $AD = |z_D - z_A| = |2i-1-i| = |i-1| = \sqrt{2}$

$AB = |z_B - z_A| = |3+i-1-i| = 2$

$BC = |z_C - z_B| = |2+2i-3-i| = |-1+i| = \sqrt{2}$; $AD = BC = \sqrt{2}$

$DC = |z_C - z_D| = |2+2i-2i| = |2| = 2$ On a : $AB = DC$ et $BC = AD$ donc ABCD est un parallélogramme..

2) a) $z_E = z_D - z_A = 2i-1-i = -1+i = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

b) $\frac{z_E}{z_F} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)\right)$

c). $\frac{z_E}{z_F} = \frac{-1+i}{2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{-1+i}{-1+i\sqrt{3}} = \frac{i-1}{1+i\sqrt{3}} = \frac{(i-1)(1-i\sqrt{3})}{4} = \frac{i+\sqrt{3}-1+i\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}-1}{4}+i\frac{1+\sqrt{3}}{4}$

Par identification, on obtient : $\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{13\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{13\pi}{12} = \frac{i+\sqrt{3}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\frac{13\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \\ \sin\frac{13\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

d) $\left(\frac{z_E}{z_F}\right)^{12} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{12}(\cos 13\pi + i\sin 13\pi) = \frac{2^6}{2^{12}}(\cos\pi + i\sin\pi)\frac{1}{2^6}(-1) = -\frac{1}{64}$

Exercice N°12:

1) a) $(z+6i)^2 - 12 = z^2+12iz-36-12 = z^2-12iz-48$

b) $z^2+12iz-48 = (z+6i)^2-12 = (z+6i)^2-\sqrt{12}^2 = (z+6i-\sqrt{12})(z+6i+\sqrt{12})$

$z^2+12iz-48 = 0$ signifie que $z' = -6i+\sqrt{12}$ et $z'' = -6i-\sqrt{12}$ donc $S_C = \{-6i-\sqrt{12}; -6i+\sqrt{12}\}$

2) a) $z_1 = 1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$; $z_2 = 1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

b) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} = \frac{(1+i\sqrt{3})(1-i)}{2} = \frac{1-i+i\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}-i(1-\sqrt{3})}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}-i\frac{1-\sqrt{3}}{2}$.

$\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12}+i\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}-i\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

c) on a : $\begin{cases} \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{cases}$ donc $\begin{cases} \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \\ \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$

Exercice N°13: 1) $z_1=-\sqrt{2}+i\sqrt{6}=2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$z_2=3\sqrt{2}-3\sqrt{2}i=6\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=6\left(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})\right)$

$z_3=\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i=3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=6\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)=3\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

2) $U=\frac{z_1\times z_2}{z_3}$; $z_1\times z_2=2\sqrt{2}\times 6\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right)=12\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$

$U=\frac{z_1\times z_2}{z_3}=\frac{12\sqrt{2}}{3}\frac{\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)}=4\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$

3) $U=\frac{z_1\times z_2}{z_3}=\frac{\left(-\sqrt{2}+i\sqrt{6}\right)\left(3\sqrt{2}-i3\sqrt{2}\right)}{\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{3}{2}i}=\frac{-6+6i+i3\sqrt{12}+3\sqrt{2}\sqrt{6}}{\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{3}{2}i}=\frac{-6+6i+6i\sqrt{3}+6\sqrt{3}}{\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{3}{2}i}$

$=\frac{-12+12\sqrt{3}+12i\left(1+\sqrt{3}\right)}{3\sqrt{3}-3i}$

$=\frac{\left[12\left(\sqrt{3}-1\right)+12i\left(1+\sqrt{3}\right)\right]\left[3\sqrt{2}-3i\right]}{36}\ \frac{36\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)-36i\left(\sqrt{3}-1\right)+36i\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)+36\left(1+\sqrt{3}\right)}{36}$

$=\frac{36\sqrt{6}-36\sqrt{2}+36i\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}-\sqrt{3}+1\right)+36+36\sqrt{3}}{36}=\frac{36\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}+\sqrt{3}+1\right)+36i\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}-\sqrt{3}+1\right)}{36}$

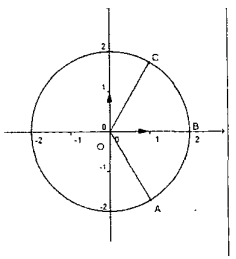
$=\sqrt{3}+\sqrt{6}-\sqrt{2}+1+i\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{3}+1\right)$

4) $\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}+1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$; $\sin\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{3}+1}{4\sqrt{2}}$.

Exercice n°14 :

1) $z_A=1-i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$ et

$z_C=1+i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

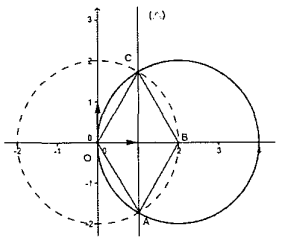


2) On a : $z_{\overrightarrow{OA}}=z_A=1-i\sqrt{3}$ et $z_{\overrightarrow{CB}}=z_B-z_C=2-\left(1+i\sqrt{3}\right)=1-i\sqrt{3}$ donc $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CB}$ et puisque O, A et B ne sont pas alignés alors OABC est un parallélogramme. Et

comme $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\2\sqrt{3}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\Rightarrow 0\times 2+2\sqrt{3}\times 0=0\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{OB}$ donc OABC est un losange.

3) a) $z_A+\overline{z}_A-2=1-i\sqrt{3}+1+i\sqrt{3}-2=0$ et $z_C+\overline{z}_C-2=1+i\sqrt{3}+1-i\sqrt{3}-2=0$ donc A et C sont deux points de Δ.

b) Posons z = x + iy où x et y sont des réels. $M(z)\in\Delta\Leftrightarrow z+\overline{z}-2=0\Leftrightarrow 2x-2=0\Leftrightarrow x=1$ donc Δ est la droite d'équation x = 1.



4) a) $z_{A'}=\frac{4}{2-z_A}=\frac{4}{1+i\sqrt{3}}=1-i\sqrt{3}=z_A\Rightarrow A'=A$

$z_{C'}=\frac{4}{2-z_C}=\frac{4}{1-i\sqrt{3}}=1+i\sqrt{3}=z_C\Rightarrow C'=C$.

b) pour tout nombre complexe z

$\neq 2, |z'-2|=\left|\frac{4}{2-z}-2\right|=\left|\frac{2z}{2-z}\right|=\frac{|2z|}{|2-z|}=\frac{2|z|}{|z-2|}$.

c) Δ est la médiatrice du [OB] donc lorsque M décrit Δ, OM = MB ou encore $|z|=|z-2|$ d'où $\frac{|z|}{|z-2|}=1$ donc

$|z'-2|=\frac{2|z|}{|z-2|}=2$ donc $BM'=2$. Ainsi, l'ensemble des points M' lorsque M décrit (A) est le cercle de centre Bet de rayon 2.

Exercice n°15 : 1) a) $\boxed{S_C=\{-2i,2i\}}$ .b) $\left(Z-2\sqrt{3}\right)^2=Z^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2-2\times 2\sqrt{3}\times Z=Z^2+12-4\sqrt{3}Z$

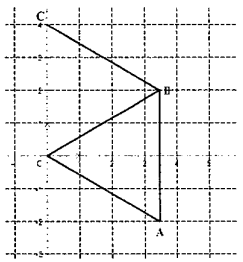
c) $Z^2-4\sqrt{3}Z+16=0\Leftrightarrow\left(Z^2-4\sqrt{3}Z+12\right)-(-4)=0\Leftrightarrow\left(Z-2\sqrt{3}\right)^2-(2i)^2=0$

$\Leftrightarrow\left(Z-2\sqrt{3}-2i\right)\left(Z-2\sqrt{3}+2i\right)=0\Leftrightarrow Z-2\sqrt{3}-2i=0$ ou $Z-2\sqrt{3}+2i=0$

$\Leftrightarrow Z=2\sqrt{3}+2i$ ou $Z=2\sqrt{3}-2i$ d'où $\boxed{S_C=\left\{2\sqrt{3}-2i,2\sqrt{3}+2i\right\}}$.

2) a) $|Z_A| = \sqrt{12+4} = 4$ donc $\begin{cases} \cos\theta = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$ alors $\theta = -\frac{\pi}{6}$ .d'où $\boxed{Z_A = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)}$. De même pour $\boxed{Z = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)}$.

b)Voir figure.



c) $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{OA},\vec{u}}\right) + \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OB}}\right)[2\pi] \equiv -\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OA}}\right) + \frac{\pi}{6}[2\pi]$

$\equiv -\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6}[2\pi] \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

d) $|Z_A| = |Z_B|$ sig OA = OB donc OAB est isocèle or on a $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ alors OAB est équilatéral.

3) I est le centre de gravité de OAB

sig $\overrightarrow{IO} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow -Z_I + Z_B - Z_I + Z_A - Z_I = 0$

$\Leftrightarrow 3Z_I = Z_A + Z_B = 4\sqrt{3}$ donc $\boxed{Z_I = \frac{4\sqrt{3}}{3}}$.

4) OABC est un losange donc $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow Z_C = Z_B - Z_A = 2\sqrt{3} + 2i - \left(2\sqrt{3} - 2i\right) = \boxed{4i}$

5) $|Z| = |\overline{Z} + 4i| \Leftrightarrow |Z| = |\overline{Z - 4i}| \Leftrightarrow |Z| = |Z - 4i| \Leftrightarrow$ OM = CM donc M appartient à la médiatrice du segment [OC].

Exercice n°16: 1) $z_1 = \frac{2-i}{1+i} - (1-i)^2 = \frac{(2-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} - \left(1 - 2i + i^2\right) = \frac{2-2i-i+i^2}{1-i^2} + 2i = \frac{1-3i}{2} + 2i = \boxed{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i}$.

$z_2 = (2-i)^4 - i^{2009} = 2^4 - 4\times 2^3.i + 6\times 2^2 i^2 - 4\times 2.i^3 + i^4 - i^{4\times 502+1} = 16 - 32i - 24 + 8i + 1 - \left(i^4\right)^{502}.i = \boxed{-7-25i}$

2) a- $z' = \frac{iz}{z-1} = \frac{i(x+iy)}{x+iy-1} = \frac{ix-y}{(x-1)+iy} = \frac{(ix-y)((x-1)-iy)}{(x-1)^2+y^2} = \frac{ix.(x-1)+x.y+y.(x-1)-iy^2}{(x-1)^2+y^2}$

$= \frac{y+i\left(x^2+y^2-x\right)}{(x-1)^2+y^2}$ donc $\boxed{z' = \frac{y}{(x-1)^2+y^2} + i\frac{x^2+y^2-x}{(x-1)^2+y^2}}$.

b) z' est un réel $\Leftrightarrow \mathrm{Im}(z') = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - x = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ alors ζ est le cercle de centre $I\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et de rayon $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ privé du point A(1 ;0), en effet $z \neq 1 \Leftrightarrow (x,y) \neq (1,0)$ et le couple (1 ;0) vérifie l'équation du cercle donc $\boxed{\zeta = \zeta_{/\left(I,\frac{1}{2}\right)} \setminus \{A(1;0)\}}$.

3) a) $z^2 - 2z + 5 = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = (z-1)^2 + 4$

b) $z^2 - 2z + 5 = 0 \Leftrightarrow (z-1)^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (z-1)^2 = -4 \Leftrightarrow (z-1)^2 = (-2i)^2 \Leftrightarrow z - 1 = -2i$ ou $z - 1 = 2i$

$\Leftrightarrow z = 1 - 2i$ ou $z = 1 + 2i$ donc $\boxed{S_C = \{1-2i; 1+2i\}}$

Exercice N°17:

1)a) $z_A = \sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$; $z_B = -1 - i\sqrt{3} = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$

$\frac{z_A}{z_B} = \frac{2}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{4\pi}{3}\right)\right) = \cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$

b) On a : OA = 2 et A d'ordonnée 1 alors A est le point d'intersection du cercle de centre O et de rayon 2 et la droite d'équation X = 1 .

On a : OB = 2 et B d'ordonnée - 1 alors B est le point d'intersection du cercle de centre O et de rayon 2 et la droite d'équation X = −1

c) $AC = |z_C - z_A| = |-2 - \sqrt{3} - i| = \sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2 + 1} = \sqrt{8 + 4\sqrt{3}}$

$BC = |z_C - z_B| = |-2 + 1 + i\sqrt{3}| = |-1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{4} = 2$

$AB = |z_B - z_A| = |-1 - -i\sqrt{3} - \sqrt{3} - i| = |-1 - \sqrt{3} - i\left(1+\sqrt{3}\right)| = \sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)^2 + \left(1+\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{2\left(1+\sqrt{3}\right)^2}$

$= \sqrt{2\left(4 + 2\sqrt{3}\right)} = \sqrt{8 + 4\sqrt{3}}$

On a : AB = AC donc ABC est un triangle isocèle en A.

2) I = A * B donc $z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{\sqrt{3} + i - 1 - i\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} + i\frac{1 - \sqrt{3}}{2}$.

3) $z_0 = 4\cos\frac{\pi}{12}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

a) aff $\left(\overrightarrow{CA}\right)=z_A-z_C=\sqrt{3}+2+i$, on a : $O\hat{C}A=\frac{\pi}{12}$ car $A'\hat{O}A=\frac{\pi}{6}$, $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{AC}{4}$ car CAA' est rectangle en A $\Leftrightarrow AC=4\cos\frac{\pi}{12}$ donc $z_A-z_C=AC\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)=4\cos\frac{\pi}{12}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ ainsi Aff $\left(\overrightarrow{CA}\right)=z_0$.

b) on a d'une part : $z_A-z_C=4\cos\frac{\pi}{12}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ et d'autre part on a : $z_A-z_C=\sqrt{3}+2+i$;

$$|z_A-z_C|=\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2+1}=\sqrt{8+4\sqrt{3}}=2\sqrt{4+\sqrt{3}}\Rightarrow z_A-z_C=2\sqrt{4+\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{4+\sqrt{3}}}+i\frac{1}{2\sqrt{4+\sqrt{3}}}\right)$$

$$=4\cos\frac{\pi}{12}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)\text{donc } 4\cos\frac{\pi}{12}=2\sqrt{4+\sqrt{3}}\Leftrightarrow\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{4+\sqrt{3}}}{2}.$$

c)

$$z_A-z_B=\sqrt{3}+i+1+i\sqrt{3}=1+\sqrt{3}+\left(1+\sqrt{3}\right)i=\left(1+\sqrt{3}\right)(1+i)=\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$=\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ donc $\text{Arg}\left(z_A-z_B\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$;

$$\text{Arg}\left(\frac{z_A-z_C}{z_A-z_B}\right)\equiv\arg\left(z_A-z_C\right)-\arg\left(z_A-z_B\right)[2\pi]\equiv\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{4}[2\pi]\equiv-\frac{\pi}{6}[2\pi]$$

4) * $\left|iz-i\sqrt{3}+1\right|=2\Leftrightarrow\left|i\left(z-\sqrt{3}+\frac{1}{i}\right)\right|=2\Leftrightarrow\left|z-\sqrt{3}-i\right|=2\Leftrightarrow\left|z-\left(\sqrt{3}+i\right)\right|=2\Leftrightarrow AM=2$

Donc E_1 est le cercle de centre A et de rayon 2.

* $\left|\overline{z}+2\right|=\left|2-\sqrt{3}-i\right|$; $\left|\overline{z+2}\right|=\left|z-\left(\sqrt{3}+i\right)\right|\Leftrightarrow\left|z+2\right|=\left|z-\left(\sqrt{3}+i\right)\right|$ signifie CM = AM donc

$M\in$ méd$([AC])$

Donc $E_2=$ méd$([AC])$.

Exercice N°18 : a) $A(0;1)$; $B(\cos\theta;1-\sin\theta)$ et $C(-\cos\theta;-1-\sin\theta)$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\cos\theta\\-\sin\theta\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-\cos\theta\\-2-\sin\theta\end{pmatrix}$.

A, B et C sont alignés si et seulement si $\text{dét}\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=0\Leftrightarrow\cos\theta(-2-\sin\theta)-\cos\theta\sin\theta=0$

$\Leftrightarrow-2\cos\theta-2\cos\theta\sin\theta=0\Leftrightarrow\cos\theta(1+\sin\theta)=0\Leftrightarrow\cos\theta=0$ ou $1+\sin\theta=0\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{2}$ car $\theta\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ ou

$\sin\theta=-1$ impossible car $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\Rightarrow\sin\theta\ge0$

b) B et C appartiennent au cercle

$\xi_{(O;r)}\Leftrightarrow OB=OC\Leftrightarrow|z_B|=|z_C|\Leftrightarrow\sqrt{\cos^2\theta+(1-\sin\theta)^2}=\sqrt{\cos^2\theta+(1+\sin\theta)^2}$

$\Leftrightarrow\cos^2\theta+1-2\sin\theta+\sin^2\theta=\cos^2\theta+1+2\sin\theta+\sin^2\theta\Leftrightarrow-\sin\theta=\sin\theta\Leftrightarrow2\sin\theta=0\Leftrightarrow\sin\theta=0$

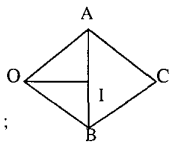
$\Leftrightarrow\theta=0$ car $\theta\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

$r=OB=\sqrt{\cos^2\theta+(1-\sin\theta)^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

Exercice N° 19 : 1) a) $z^2-2z+10=z^2-2z+1+9=(z-1)^2+9$

b) $z^2-2z+10=0$ signifie que $(z-1)^2-(i3)^2=0$ signifie que $(z-1-i3)(z-1+3i)=0$ signifie que $z=1+3i$ ou $z=1-3i$ donc $S_C=\{1+3i\ ;\ 1-3i\}$

2) $z_A=1-3i$; $z_B=1+3i$



a) $OA=\sqrt{10}$; $OB=\sqrt{10}$ donc OAB est isocèle en O

b) $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC}$ signifie que $z_C=z_B-z_A=1+3i+1-3i=2$

c) Soit $I=A*B$; $z_I=\frac{z_A+z_B}{2}=1$ donc $OA=1$ d'où $\text{Aire}_{(OACB)}=2\frac{AB.OI}{2}=AB.OI$;

$AB=|z_B-z_A|=|6i|=6$ donc $\text{Aire}_{(OACB)}=6\,cm^2$

3) a) $|z-1+3i|=2$ signifie que $|z-(1-3i)|=2$ signifie que $AM=2$ Donc $C=\xi_{(A;2)}$

b) $|z|=|z-(1+3i)|$ signifie que $OM=BM$ donc $\Delta=$ méd$[OB]$

Exercice N°20: $z_A=\sqrt{3}-i$ et $z_B=1+i\sqrt{3}$

1) $OA=|z_A|=2$; $OB=|z_B|=\sqrt{1+\left(\sqrt{3}\right)^2}=2$ On a $OA=OB$ donc OAB est isocèle en O

2) a) $z_A=\sqrt{3}-i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$ donc $A\left(2;-\frac{\pi}{6}\right)$

$z_B=1+i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ Donc $B\left(2;\frac{\pi}{3}\right)$

b) $\left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right)\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{OA};\vec{i}}\right)+\left(\widehat{\vec{i};\overrightarrow{OB}}\right)[2\pi]\equiv\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}[2\pi]\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

3) $z_C=z_A+z_B\Leftrightarrow z_C-z_O=(z_A-z_O)+(z_B-z_O)\Leftrightarrow\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\Leftrightarrow$ OACB est un parallélogramme.

On a : $OA=OB$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc OACB est un carré.

4) Soit $E=\{M\in P$ tel que : $|Z-1-i\sqrt{3}|=|Z-\sqrt{3}+i|\}$ $|Z-1-i\sqrt{3}|=|Z-\sqrt{3}+i|$ signifie que $|Z-(1+i\sqrt{3})|=|Z-(\sqrt{3}-i)|$ signifie que $|Z-z_A|=|Z-z_B|$ signifie que $BM=AM$

Donc $M\in$ méd$([AB])$ donc $E=$ méd$([AB])$

Exercice N°21 : $z_A=2$; $z_B-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$; $z_C=1+i$ et $z_D=-2i$

1)a) $A(2;0)$; $B\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$; $C(1;1)$; $D(0;-2)$

b) $z_A=2(\cos 0+i\sin 0)$; $z_C=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

$z_D=2(0-i)=2\left(\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}\right)=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$

2) $|z-2|=|z+2i|$ signifie que $AM=DM$ donc $E=$ méd$([AD])$

$|iz+1-i|=|i(z-i-1)|=2$ signifie que $|z-(1+i)|=2$ signifie que $MC=2$ donc $F=\xi_{(0;2)}$

3) a) $\text{Aff}(\overrightarrow{AB})=-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i$; $\text{Aff}(\overrightarrow{AD})=-2-2i$; $\text{Aff}(\overrightarrow{BD})=-\frac{1}{2}-\frac{7}{2}i$

$AB=\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{9}{4}}=\frac{\sqrt{18}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$; $AB=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$; $BD=\sqrt{\frac{19}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{50}}{2}$

$AB^2+AD^2=\frac{18}{4}+\frac{32}{4}=\frac{50}{4}=BD^2$ d'où ABD est un triangle rectangle en A

b) ABED est un rectangle signifie que $z_E-z_B=z_D-z_A$; $z_E=z_D-z_A+z_B=-2i-2+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i=-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$

c) L'aire de ABED ; $AB\times AD=2\sqrt{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}=6\,\text{cm}^2$

Exercice N° 22: $z_A=2i$; $z_B=1-i$; $z_C=-3+i$ .1) $A(0;2)$; $B(1;-1)$ et $C(-3;1)$

2) $|z-1+i|=|z-2i|\Leftrightarrow|z-(1-i)|=|z-2i|$ signifie que $BM=AM$ donc $E=$ méd$([AB])$

3) a) $AB=|z_B-z_A|=|1-i-2i|=|1-3i|=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$

$AC=|z_C-z_A|=|-3+i-2i|=|-3-i|=\sqrt{10}$; $BC=|z_C-z_B|=|-3+i-1+i|=|-4+2i|=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

b) On a : $\begin{cases}AB=AC\\AB^2+AC^2=BC^2\end{cases}$ donc ABC est un triangle isocèle rectangle en A.

4) a) $D=S_{(O,i)}(C)$ donc $z_D=-3-i$

b) Soit $I=B*C$, on a $IA=IB=IC=\sqrt{5}$; $z_I=\frac{z_B+z_C}{2}=\frac{1-i-3+i}{2}=-1$

$ID=|z_D-z_I|=|-3-i+1|=|-2-i|=\sqrt{5}$ On a donc $IA=IB=IC=ID$ d'où A, B, C et D appartiennent au même cercle de centre I et de rayon $\sqrt{5}$

5) a) $\frac{z_A-z_E}{z_C-z_E}=-i+1$ signifie que $z_A-z_E=(-i+1)z_C-(-i+1)z_E\Leftrightarrow -z_E+(-i+1)z_E=(-i+1)z_C-z_A$

$\Leftrightarrow -iz_E=(-i+1)(-3+i)-2i=3i+1-3+i-2i=2i-2=-2-2i$ signifie que $z_E=-2-2i$.

b) $AB=AC=\sqrt{10}$, $BE=|z_E-z_B|=|-2-2i-1+i|=|-3-i|=\sqrt{10}$, $CE=|z_E-z_C|=|-2-2i+3-i|=|1-3i|=\sqrt{10}$

On a : $AB=AC=BE=CE$ et ABC rectangle en A Donc ABEC est un carré.

Exercice 23 : 1) a) $Z=\frac{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}-i)}{4}=\frac{3-i\sqrt{3}-i\sqrt{3}-1}{4}=\frac{2-2i\sqrt{3}}{4}=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

b) $iZ=\frac{i+\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}+i}{2}$; $Z^2=\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1-2i\sqrt{3}-3}{4}=\frac{-2-2i\sqrt{3}}{4}=-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$

c) $U=\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}+\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}=Z+\overline{Z}=2\,\text{Re}(Z)=2\times(\frac{1}{2})=1$

2)a) $(z+1)^2+1=z^2+2z+1+1=z^2+2z+2$

b) $z^2+2z+2=0\Leftrightarrow(z+1)^2=-1\Leftrightarrow\begin{cases}\Leftrightarrow z+1=i \text{ ou } z+1=-i\\\Leftrightarrow z=-1+i \text{ ou } z=-1-i\end{cases}\Rightarrow S_C=\{-1+i;-1-i\}$

3) $Z_A=1+i$; $Z_B=-1-i$; $Z_C=\sqrt{3}-i\sqrt{3}$

a) $AB=|-1-i-1-i|=|-2-2i|=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$

$AC=|\sqrt{3}-i\sqrt{3}-1-i|=|(\sqrt{3}-1)-i(\sqrt{3}+1)|=\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{3}+1)^2}=\sqrt{4-2\sqrt{3}+4+2\sqrt{3}}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

$BC=|Z_C-Z_B|=|\sqrt{3}-i\sqrt{3}+1+i|=|\sqrt{3}+1+i(1-\sqrt{3})|=\sqrt{(1+\sqrt{3})^2+(1-\sqrt{3})^2}=\sqrt{1+2\sqrt{3}+3+1-2\sqrt{3}+3}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

Donc $AB=AC\Rightarrow$ ABC est un triangle équilatéral

b) $A(1,1)$; $B(-1,-1)$; le point C tel que ABC est équilatéral et $x_C>0$

c) $Z_A=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$, $Z_B=\sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4})$, $Z_C=\sqrt{3}(1-i)=\sqrt{3}\,\overline{Z_A}=\sqrt{6}(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})$

d) $(\widehat{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA}})\equiv(\widehat{\overrightarrow{OC},\vec{u}})+(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OA}})[2\pi]\equiv-(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OC}})+(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OA}})[2\pi]\equiv-\arg(Z_C)+\arg(Z_A)[2\pi]$

$\equiv\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}[2\pi]\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\Rightarrow$ Le triangle OAC est rectangle en O.

e) pour que OADC soit un rectangle il suffit qu'il soit un parallélogramme

OADC est un parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow Z_A = Z_D - Z_C \Leftrightarrow Z_D = Z_A + Z_C = 1 + i + \sqrt{3} - i\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow Z_D = (1+\sqrt{3}) + i(1-\sqrt{3})$

Exercice n° 24 : A) 1) $z_A = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}$.

2) $z_B = \overline{z_A} = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$ et

$z_C = -\overline{z_A} = -z_B = 2\left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$.

3) $|z_D| = \frac{2\times 2}{2} = 2$ et $\arg(z_D) \equiv \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}[2\pi] \equiv -\frac{2\pi}{3}[2\pi]$ donc $z_D = 2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$.

On a OA = OB = OC = OD = 2 et on a vérifie aisément que O = A*D = B*C ($z_D = -z_A$ et $z_C = -z_B$) donc ABCD est rectangle.

B) 1) Vrai : $-\frac{\pi}{4} < \alpha < 0 \Rightarrow -1 < \tan\alpha < 0 \Rightarrow 0 < \tan^2\alpha < 1 \Rightarrow 1 - \tan^2\alpha > 0$.

2) Vrai : $|z| = \sqrt{(1-\tan^2\alpha)^2 + 4\tan^2\alpha} = \sqrt{1 + 2\tan^2\alpha + \tan^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha$.

3) Faux : Soit β un argument de z alors : $\cos\beta = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos(2\alpha)$ de même $\sin\beta = \sin(2\alpha)$ donc $\beta \equiv 2\alpha[2\pi]$

LES EXERCICES

Exercice N°1 :

1) * $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + 0.\overrightarrow{AC} + 0.\overrightarrow{AD} \Rightarrow I\left(\frac{1}{3};0;0\right)$;

* $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + 0.\overrightarrow{AD} \Rightarrow J\left(\frac{3}{4};\frac{1}{4};0\right)$

* $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CK} = \overrightarrow{AC} + \frac{3}{8}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}\right) = \frac{5}{8}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AD} \Rightarrow K\left(0;\frac{5}{8};\frac{3}{8}\right)$

* $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AD} \Rightarrow L\left(0;\frac{1}{6};\frac{1}{6}\right)$

2) $\overrightarrow{IL}\begin{pmatrix} 0-\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6}-0 \\ \frac{1}{6}-0 \end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{IL}\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{JK}\begin{pmatrix} 0-\frac{3}{4} \\ \frac{5}{8}-\frac{1}{4} \\ \frac{3}{8}-0 \end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{JK}\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} \end{pmatrix}$ on conclut que $\overrightarrow{IL} = \frac{4}{9}\overrightarrow{JK}$ donc $m = \frac{4}{9}$

Exercice N°2 : 1) a) On a : $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ or $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ car (ABCD carré) donc $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{BL} \Rightarrow$ $\overrightarrow{JL} = \overrightarrow{AB}$ de même on trouve : $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{A'B'}$ comme $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ (ABB'A' un carré) d'où $\overrightarrow{JL} = \overrightarrow{IK}$ par suite $(JL)//(IK)$ et par suite I, J, K et L sont coplanaires.

b) $\overrightarrow{D'K} = \overrightarrow{D'C'} + \overrightarrow{C'K}$ or K = B'*C $\Rightarrow \overrightarrow{C'K} = \frac{1}{2}\overrightarrow{C'B'}$

$\overrightarrow{D'K} = \overrightarrow{D'C'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C'B'} \Rightarrow \overrightarrow{D'K}; \overrightarrow{D'C'}$ et $\overrightarrow{C'B'}$ sont coplanaires.

c) On a : $\overrightarrow{IB'} = \overrightarrow{IA'} + \overrightarrow{A'B'}$ or I = A'*D' ou encore $\overrightarrow{IA'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{D'A'} + \overrightarrow{A'B'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{C'B'} + \overrightarrow{D'C'}$

car $\overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{B'C'}$ et $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{D'C'}$ or $\overrightarrow{D'K'} = \overrightarrow{D'C'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C'B'}$ par suite $\overrightarrow{IB'} = \overrightarrow{D'K}$.

2) La droite (IJ) est parallèle à la droite (KL) donc au plan (D'KL). La droite (IB') est parallèle à la droite (D'K) (car $\overrightarrow{IB'} = \overrightarrow{D'K}$) donc au plan (D'KL). Les deux droites (IJ) et (IB') du plan (IJB') sont sécantes en I et toutes deux parallèles au plan (D'KL) par suite (IJB') est parallèle au plan (D'KL).

Exercice N°3 : A(1;1;−2) ; B(0;2;1) ; C(−1;2;3) et D(0;3;2).

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$; on a : $\frac{-2}{-1} \neq \frac{1}{1}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et par suite les points A, B et C ne sont pas alignés.

2) On pourra montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont coplanaires. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas colinéaires.

Montrons qu'il existe un couple $(\alpha;\beta)$ de réels tel que : $\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix}$; soient α et β deux réels , on a : $\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases}-\alpha-\beta=-1\\ \alpha=2\\ 3\alpha+2\beta=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=2\\ \beta=-1\\ 3\alpha+2\beta=4\end{cases}$

Pour $\alpha=2$ et $\beta=-1$, on a : $3\alpha+2\beta=6-2=4$ .On a alors : $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont coplanaires et par suite D appartient au plan P.

2ième méthode : $\det(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}) = \begin{vmatrix}-1&-1&-1\\1&0&2\\3&2&4\end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix}0&2\\2&4\end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}1&0\\3&2\end{vmatrix}=0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont coplanaires et par suite D appartient au plan P.

3) $F(1-m;m;m+1)\mathbb{R}$ .On a : $A\in P$; la droite (AF) est contenue dans P si et seulement si $F\in P$ .Soit les réels α et β tel que $\overrightarrow{AF}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}-m\\m-1\\m+3\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AF}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow (S):\begin{cases}-\alpha-\beta=-m & (1)\\ \alpha=m-1 & (2)\\ 3\alpha+2\beta=m+3 & (3)\end{cases}$

De (2) On a : $\alpha=m-1$; de (1) on obtient $\beta=-m+1+m=1$; le système (S) admet une solution $(\alpha;\beta)$ si et seulement si α et β trouvés vérifient l'égalité (3), on obtient alors :

$F\in P \Leftrightarrow 3(m-1)+2=m+3 \Leftrightarrow m=2$ on conclut que (AF) est contenue dans P si et seulement si $m=2$.

4) $\overrightarrow{e_1}=3\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$; $\overrightarrow{e_2}=\vec{j}+2\vec{k}$ et $\overrightarrow{e_3}=\vec{i}+2\vec{j}$.

a) $\overrightarrow{e_1}\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{e_2}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{e_3}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$; on a : $\begin{vmatrix}0&1\\1&2\end{vmatrix}=-1\neq 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{e_3}$ ne sont pas colinéaires.

Soit α et β des réels tel que : $\overrightarrow{e_1}=\alpha\overrightarrow{e_2}+\beta\overrightarrow{e_3} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta=3\\ \alpha+2\beta=1\\ 2\alpha=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=1\\ \beta=3\\ \alpha+2\beta=1\end{cases}$; pour $\alpha=1$ et $\beta=3$;

$\alpha+2\beta=7\neq 1$ donc, il n'existe aucun couple $(\alpha;\beta)$ de réels tels que $\overrightarrow{e_1}=\alpha\overrightarrow{e_2}+\beta\overrightarrow{e_3}$. Il en résulte que $\overrightarrow{e_1}$; $\overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{e_3}$ ne sont pas coplanaires et par suite $R'=(A;\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2};\overrightarrow{e_3})$ est un repère de ξ ..

b) Désignons par $(X;Y;Z)$ les coordonnées de B dans le repère R', on a alors $\overrightarrow{AB}=X\overrightarrow{e_1}+Y\overrightarrow{e_2}+Z\overrightarrow{e_3}$ signifie que $\overrightarrow{AB}=X(3\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})+Y(+\vec{j}+2\vec{k})+Z(\vec{i}+2\vec{j})\pm \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=(3X+z)\vec{i}+(X+Y+2Z)\vec{j}+(2X+2Y)\vec{k}$, on

sait que $\overrightarrow{AB}=-\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$ on en déduit que : $\begin{cases}3X+Z=-1\\ X+Y+2Z=1\\ 2X+2Y=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}X+Y=\frac{3}{2}\\ \frac{3}{2}+2Z=1\\ 3X+Z=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}Z=-\frac{1}{4}\\ X=-\frac{1}{4}\\ Y=\frac{7}{4}\end{cases}$ donc

$B\left(-\frac{1}{4};\frac{7}{4};-\frac{1}{4}\right)$ dans le repère R'

Exercice n°4: 1) $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=3\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k} \Rightarrow G(3;4;3)$.

2)On a $I(3;2;0)$, $J(0;2;3)$ et $K(2;0;3)$

Exercice N° 5: $A'=B*C$; G est le centre de gravité de triangle ABC.

1) $\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

a) $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$; $\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{EA'}+\overrightarrow{AG}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{AA'}-\overrightarrow{AD})=\frac{2}{3}(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AA'})=\frac{2}{3}\overrightarrow{DA'}$

Donc $\overrightarrow{EG}$ *et* $\overrightarrow{DA'}$ sont colinéaires

b) Les vecteurs $\overrightarrow{EG}$; $\overrightarrow{BD}$ *et* $\overrightarrow{DC}$ sont coplanaires car

$\overrightarrow{DA'}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC})=\frac{3}{2}\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=3\overrightarrow{EG} \Leftrightarrow \overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}-3\overrightarrow{EG}=0$

2)

$\overrightarrow{GF}=\frac{2}{9}\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{A'F}=\overrightarrow{A'G}+\overrightarrow{GF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{A'A}+\frac{2}{9}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{A'A}+\frac{2}{9}\times\frac{3}{2}\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{A'A}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$

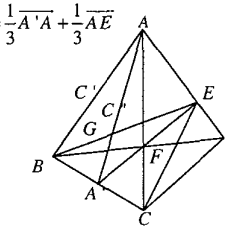
$=\frac{1}{3}(\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{AE})=\frac{1}{3}\overrightarrow{A'E}$

Donc A', F et E sont alignés.

$\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{FE}=3\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GE}=3\overrightarrow{FG}-\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GE}=3\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{AE}$

$=3\overrightarrow{FA'}+3\overrightarrow{A'G}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{EA'}+3\overrightarrow{A'G}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'E}=\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{AA'}=\vec{0}$

donc F est le centre de gravité du triangle ACE.



2ième méthode :

Dans le triangle BCE on a : $\overrightarrow{A'F}=\frac{1}{3}\overrightarrow{A'E}$; $A'=B*C$, Donc F est le centre de gravité de BCE.

3) $C'=A*B$; $C''=E*B$; $\overrightarrow{C'C''}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

4)a) $\overrightarrow{CM}=3\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{CB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AD}=3(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})+4\overrightarrow{C'C''}=3(2\overrightarrow{CC'})+4\overrightarrow{C'C''}=6\overrightarrow{CC'}+4\overrightarrow{C'C''}$

)

$=6\overrightarrow{CC'}+4\overrightarrow{C'C}+4\overrightarrow{CC''}=2\overrightarrow{CC'}+4\overrightarrow{CC''}$

b) les vecteurs $\overrightarrow{CM}$; $\overrightarrow{CC'}$ *et* $\overrightarrow{CC''}$ sont coplanaires et par suite les points M, C, C' et C'' sont coplanaires (Dans le même plan)

Exercice N° 1 : 1) $A(0;0;0), B(1;0;0), C(1;1;0), D(0;1;0), E(0;0;1), F(1;0;1), G(1;1;1), H(0;1;1)$.

2) $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AG} = 1\times1+(-1)\times1+0\times1 = 0$ et $\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{AG} = 0\times1+(-1)\times1+1\times1 = 0$

$\Rightarrow \overrightarrow{DB} \perp \overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{DE} \perp \overrightarrow{AG} \Rightarrow (AG) \perp (DBE)$.

3) Le centre de gravité K du triangle BDE est défini par : $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}\right)$, on en déduit que :

$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG} \Rightarrow K \in (AG)$; K appartient aussi au plan (BDE) donc K est l'intersection de la droite (AG) et du plan (BDE).

4) $\overrightarrow{KE}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}; \overrightarrow{KC}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$. On calcule : $\overrightarrow{KE}.\overrightarrow{KC} = \left(-\frac{1}{3}\right)\times\frac{2}{3}+\left(-\frac{1}{3}\right)\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3}$. Par ailleurs

$\overrightarrow{KE}.\overrightarrow{KC} = \|\overrightarrow{KE}\|.\|\overrightarrow{KC}\|\cos E\hat{K}C$ or : $\|\overrightarrow{KE}\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$ et

$\|\overrightarrow{KC}\| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{2}{3}\right)^2} = 1$ d'où $\cos E\hat{K}C = \frac{\overrightarrow{KE}.\overrightarrow{KC}}{\|\overrightarrow{KE}\|.\|\overrightarrow{KC}\|} = \frac{-\frac{2}{3}}{\sqrt{\frac{2}{3}}\times1} = -\sqrt{\frac{2}{3}}$. La valeur affichée par la calculatrice pour l'angle $E\hat{K}C$ est 144,7 $E\hat{K}C$ ° à 0,1° prés par défaut.

Exercice N° 2 : $AB = 3$; $AD = 4$; $AE = 5$; $\vec{i} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$; $\vec{j} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ *et* $\vec{k} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AE}$

1) $\|\vec{i}\| = \frac{1}{3}AB = 1$; $\|\vec{j}\| = \frac{1}{4}AD = 1$; $\|\vec{k}\| = \frac{1}{5}AE = 1$; $\vec{i} \perp \vec{j}$ *car* $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$ *et* $\vec{j} \perp \vec{k}$ *car* $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AE}$

donc $(A;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ est un repère orthonormé de l'espace.

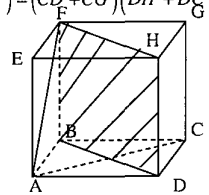
2) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD} = 3\vec{i}+4\vec{j} \Rightarrow C(3;4;0)$; $\overrightarrow{AE} = 5\vec{k} \Rightarrow E(0;0;5)$;

$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG} = 3\vec{i}+4\vec{j}+5\vec{k} \Rightarrow G(3;4;5)$

3) $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}-3\\-4\\5\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{CE} = -9-16+25 = -25+25 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AG} \perp \overrightarrow{CE}$ et par suite (AG) *et* (CE) sont orthogonaux.

Exercice N° 3 : 1) a) $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CH}\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{CH}\left(\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{DC}\right) = \left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CG}\right)\left(\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{DC}\right)$

$= \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CG}.\overrightarrow{DH} = -CD^2+CD^2 = 0$



b) $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{CG}+\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BF}+\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BE}$; $\overrightarrow{AF} \perp \overrightarrow{CH}$ *car* $\overrightarrow{AF} \perp \overrightarrow{BE}$ *donc* $(AF) \perp (CH)$

2) a) $(AE) \perp (ABCD)$; $\left.\begin{matrix}(AE) \perp (AD)\\(AE) \perp (AB)\end{matrix}\right\} \Rightarrow (AE) \perp (ABCD)$

b) $\left.\begin{matrix}(AE) \perp (ABCD)\\(AC) \subset (ABCD)\end{matrix}\right\} \Rightarrow (AE) \perp (AC)$ *et par suite* $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AC} = 0$

3) $\left.\begin{matrix}(AE) \perp (AC)\\(HD) \parallel (AE)\end{matrix}\right\} \Rightarrow (AC) \perp (DH)$; $\left.\begin{matrix}(AC) \perp (DH)\\(AC) \perp (DB)\end{matrix}\right\} \Rightarrow (AC) \perp (HDBF)$

Exercice 4: 1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}, \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$. On en déduit que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = 0$ donc les triangles ABC, ACD et ADB sont des triangles rectangles.

2) $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix} \Rightarrow BC = \sqrt{(-2)^2+2^2+0^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix} \Rightarrow BC = \sqrt{0^2+(-2)^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ et

$\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix} \Rightarrow BC = \sqrt{2^2+0^2+(-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ d'où BC = CD = DB donc BCD est un triangle équilatéral.

3) Le centre de gravité G du triangle BCD vérifie la relation vectorielle : $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$; on en déduit les coordonnées de G : $\begin{cases}x_G = \frac{1}{3}(3+1+1) = \frac{5}{3}\\y_G = \frac{1}{3}(2+4+2) = \frac{8}{3}\\z_G = \frac{1}{3}(-1-1+1) = -\frac{1}{3}\end{cases}$ donc les composantes de $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$. On calcules :

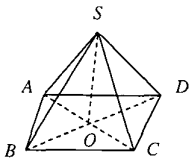
$\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\times(-2)+\frac{2}{3}\times2+\frac{2}{3}\times0. = 0$ et $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{CD} = \frac{2}{3}\times0+\frac{2}{3}\times(-2)+\frac{2}{3}\times2 = 0$. Le vecteur $\overrightarrow{AG}$ étant orthogonal à deux vecteurs non colinéaires définis par des points de plan (BCD), on en déduit que <u>la droite (AG) est orthogonale au plan (BCD)</u>.

Exercice 5 : $AB = SO = a$ $(a > 0)$

1) a) $\overrightarrow{SA}\,.\,\overrightarrow{SC}=\left(\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OA}\right)\left(\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OC}\right)=\overrightarrow{SO}.\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{SO}.\overrightarrow{OC}+\underbrace{\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{SO}}_{0}+\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}=SO^2+\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}$

$b)\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC}=a^2+OA.OC.\cos\left(A\hat{O}C\right)=a^2-OA.OC=a^2-OA^2=a^2-\left(\frac{AC}{2}\right)^2$

$=a^2-\frac{AC^2}{4}=a^2-\frac{2a^2}{4}=a^2-\frac{a^2}{2}=\frac{a^2}{2}$



2) a) $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC}=SA.SC.\cos\left(A\hat{S}C\right)$;

$SC^2=SA^2=OS^2+OA^2=a^2+\frac{a^2}{2}=\frac{3a^2}{2}$; $SC=SA=\sqrt{\frac{3}{2}}a$; $\frac{a^2}{2}=\frac{3}{2}a^2\cos\left(A\hat{S}C\right)\Rightarrow\cos\left(A\hat{S}C\right)=\frac{1}{3}$

Exercice 6 : 1) $\vec{U}.\vec{V}=-\cos\theta\sin\theta+\cos\theta\sin\theta+0=0$; $\vec{U}.\vec{W}=0$; $\vec{V}.\vec{W}=0$; $\left\|\vec{U}\right\|=\sqrt{\cos\theta^2+\sin\theta^2}=1$;

$\left\|\vec{V}\right\|=\sqrt{(-\sin\theta)^2+(\cos\theta)^2}=1$; $\left\|\vec{W}\right\|=\left\|\vec{K}\right\|=1$ par suite $\left(\vec{U};\vec{V};\vec{K}\right)$ est une base orthonormée.

2) $\vec{U}\perp\vec{i}$ si et seulement si $\vec{U}.\vec{i}=0$ si et seulement si $2\cos\theta=0$ si et seulement si $\theta=\frac{\pi}{2}+k\pi;k\in\mathbb{Z}$

Exercice 7 : 1) Calculons les produits scalaires $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$. Soit I le milieu de [CD].
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}\right).\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{CD}$. ACD est un triangle équilatéral donc (AI) est une hauteur de ce triangle. Par conséquent $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{CD}=0$. De même, BCD est un triangle équilatéral donc $\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{CD}=0$. Ceci prouve que ; donc les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

2) A' est le centre de gravité du triangle BCD équivaut à $\overrightarrow{AA'}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$ donc

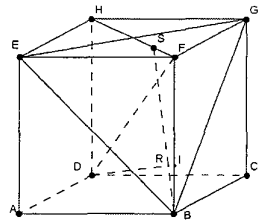
$\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right).\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{BC}\right)+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}$

où J est le milieu de [BC]. ABC est un triangle équilatéral donc $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{BC}=0$. On a vu précédemment que $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=0$. Donc : $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC}=0$. Par démonstration analogue, on prouverait que $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BD}=0$.
Comment $\overrightarrow{AA'}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ qui forment un système de vecteurs directeurs du plan (BCD), la droite (AA') est orthogonale au plan (BCD).
3) Représentons en vue de face, le triangle ABI :
Par définition du produit scalaire, $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GA'}$ (car A' est le projeté orthogonal de B sur (GA)). Or $\overrightarrow{GA}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{GA'}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AA'}$, d'où $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}=-\frac{3}{16}AA'^2$. Par ailleurs, $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}=GA\times GA\times\cos A\hat{G}B$ or

$GA'=\frac{3}{4}AA'$; de même, $GB=\frac{3}{4}BB'=\frac{3}{4}AA'$ (B' étant la centre de gravité du triangle ACD). D'où

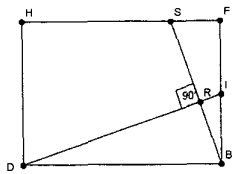
$\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}=\frac{9}{16}AA'\times\cos A\hat{G}B\Rightarrow-\frac{3}{16}AA'^2=\frac{9}{16}AA'\times\cos A\hat{G}B\Rightarrow\cos A\hat{G}B=-\frac{1}{3}$. La calculatrice donne $A\hat{G}B=109,5°$ à 0,1° près par excès.

Exercice 8: 1) On a : $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FE}$



$\Rightarrow\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{BE}=\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BF}\right)\left(\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FE}\right)$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{BF}^2+\overrightarrow{BF}.\overrightarrow{FE}$ or $\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{BE}=0$ car le plan (DAC) est orthogonal à (BF). $\overrightarrow{BF}.\overrightarrow{FE}=0$ *et* $\overrightarrow{BF}^2=a^2$.
$\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{DB}=-\overrightarrow{BA}^2$ (Par projection orthogonale de D sur (BA)). Donc $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{FE}=a^2$. Par conséquent $\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{BE}=0$. Une décomposition et un calcul tout à fait similaires prouveraient que : $\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{BG}=0$. Et comme $\left(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BG}\right)$ est un système de vecteurs directeurs du plan BEG ; donc la droite (DF) est orthogonale au plan (BEG).
2) Représentons en vue de face le rectangle DBFH. :



• soit k le réel tel que : $\overrightarrow{DR}=k\overrightarrow{DI}$. Par définition du point R
$\overrightarrow{BR}.\overrightarrow{DI}=0$ d'où $\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DR}\right).\overrightarrow{DI}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{DR}.\overrightarrow{DI}=0$

$\Leftrightarrow-\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DI}+k.\overrightarrow{DI}^2=0$ or $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{DB}^2=\left(a\sqrt{2}\right)^2=2a^2$ et

$\overrightarrow{DI}^2=DI^2=DB^2+BI^2=\left(a\sqrt{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{9a^2}{4}$. D'où

$-2a^2+k\times\frac{9a^2}{4}=0\Leftrightarrow k=\frac{8}{9}$, R est défini par $\overrightarrow{DR}=\frac{8}{9}\overrightarrow{DI}$.

• Soit m le réel tel que : $\overrightarrow{FS}=m\overrightarrow{FH}$. Par définition $\overrightarrow{BS}.\overrightarrow{DI}=0$

d'où $\left(\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FS}\right).\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BI}\right)=0\Leftrightarrow\overrightarrow{BF}.\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BF}.\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{FS}.\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{FS}.\overrightarrow{BI}=0$ or, $\overrightarrow{BF}.\overrightarrow{BI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BF}^2=\frac{a^2}{2}$,

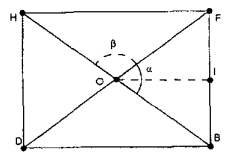
$\overrightarrow{FS}.\overrightarrow{DB}=\left(m\overrightarrow{FH}\right)\left(-\overrightarrow{FH}\right)=-m\overrightarrow{FH}^2=-m\left(a\sqrt{2}\right)^2=-2ma^2$ et $\overrightarrow{FS}.\overrightarrow{BI}=0$ d'où $\frac{a^2}{2}-2ma^2=0\Leftrightarrow m=\frac{1}{4}$; S est donc défini par : $\overrightarrow{FS}=\frac{1}{4}\overrightarrow{FH}$.

3) Soit $\alpha=B\hat{O}F$, angle sous le quel est vue une arête depuis le point O, et $\beta=F\hat{O}H$ angle sous lequel est vue une diagonale de face depuis le point O. Notons $\alpha+\beta=180°$.

$\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OF}=\left(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IB}\right)\left(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IF}\right)=\left(\overrightarrow{OI}-\overrightarrow{IF}\right)\left(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IF}\right)=\overrightarrow{OI}^2-\overrightarrow{IF}^2=\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^4}{4}$

.Par ailleurs : $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OF}=OB\times OF\times\cos B\hat{O}F$

$=\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2\cos B\hat{O}F=\frac{3a^2}{4}\cos B\hat{O}F$, on en déduit : $\frac{3a^2}{4}\cos B\hat{O}F=\frac{a^2}{4}$

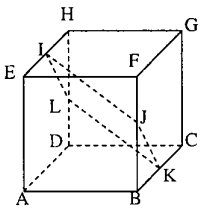


$\Leftrightarrow \cos B\hat{O}F = \frac{1}{3}$. La calculatrice donne $\alpha = 70,5°$ à 0,1° près par défaut d'où $\beta = 109,5°$ à 0,1° près.

Exercice 9 : 1) a) $A(0;0;0)$; $B(1;0;0)$; $C(1;1;0)$; $D(0;1;0)$; $E(0;0;1)$; $F(1;0;1)$; $G(1;1;1)$ et $H(0;1;1)$.

b) I est le milieu de $[EH]$; $E(0;0;1)$ et $H(0;1;1)$ alors $I\left(0;\frac{1}{2};1\right)$

de même on trouve : $J\left(1;0;\frac{1}{2}\right)$; $K\left(1;\frac{1}{2};0\right)$ et $L\left(0;1;\frac{1}{2}\right)$.



c) $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{LK}\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$. Comme $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$ alors IJKL est un parallélogramme .De plus $\overrightarrow{IL}\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IL} = 0 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0$ alors IJKL est un rectangle. Les diagonales de ce rectangle se coupent au point O milieu de $[JK]$ alors $O\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Comme $A(0;0;0)$ et $G(1;1;1)$ alors O est aussi milieu de $[AG]$. Or $[AG]$ est une diagonale du cube alors son milieu O est le centre du cube.

2) a) $IJ = \sqrt{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$; $JK = \sqrt{(1-1)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(0-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$; $IK = \sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+1^2} = \sqrt{2}$

Remarque : puisque $[IK]$ est une diagonale pour le rectangle IJKL alors $IK = \sqrt{IJ^2+JK^2} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}} = \sqrt{2}$.

Exercice n°10 : 1°/On muni l'espace E d'un repère orthonormé R et on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.On sait $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\vec{u}.\vec{v})$.Donc $|\vec{u}.\vec{v}| \le \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$ *car* $|\cos(\vec{u}.\vec{v})| \le 1$

Alors $|xa+yb+zc| \le \sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ Par suite $(xa+yb+zc)^2 \le (x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)$.

Exercice N° 1 : 1)b) 2)b 3)c) , 4)b) .

Exercice N°2 : La droite D passe par C et, étant parallèle à (AB), a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\4\\4\end{pmatrix}$. Une représentation paramétrique de D est donc : $\begin{cases}x=-4-2k\\y=5+4k\\z=7+4k\end{cases}, k\in\mathbb{R}$.

Exercice N°3 nature de l'intersection de D et D' dépend de l'existence de deux réels k et k' vérifiant : $\begin{cases}1+k=3+k'\\3-k=2-2k'\\-1+k=m+2k'\end{cases}$. On a alors les équivalences successives : $\begin{cases}1+k=3+k'\\3-k=2-2k'\\-1+k=m+2k'\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k-k'=2\\-k+2k'=-1\\k-2k'=m+1\end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases}k-k'=2\\k'=1\\k-2k'=m+1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=32\\k'=1\\1=m+1\end{cases}$. Ce système admet une solution unique (3 ;1) si et seulement si m = 0. Dans ce cas, les deux droites se coupent en un point dont les coordonnées se trouve en remplaçant k par 3 dans la représentation paramétrique de D ou k' par 1 dans celle de D'. Donc : **Si $m \neq 0$, D et D' n'ont pas de point d'intersection. Si m = 0, D et D' se coupent au point de coordonnées (4 ;0 ;2).**

Exercice N° 4: $A(2;3;-1)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.1) Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace ; $M \in D(A;\vec{u}) \Leftrightarrow$ il existe $\alpha \in IR$ tel que $\overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases}x-2=\alpha\\y-3=0\\z+1=\alpha\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2+\alpha\\y=3\\z=-1+\alpha\end{cases}$ donc une représentation paramétrique de $D(A;\vec{u})$ la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est : $\begin{cases}x=2+\alpha\\y=3\\z=-1+\alpha\end{cases};(\alpha\in IR)$.

2) $C(2;3;0)$ et $D(-1;1;5)$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-3\\-2\\5\end{pmatrix}$ et par suite comme dans la question précédente, une représentation paramétrique de la droite (CD) est $\begin{cases}x=2-3\beta\\y=3-2\beta\\z=5\beta\end{cases};(\beta\in IR)$.

3) On a : $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-3\\-2\\5\end{pmatrix}$, on remarque que $\begin{vmatrix}1 & -3\\0 & -2\end{vmatrix}=-2\neq 0$ donc $\vec{u}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires et par suite $D\left(A;\vec{u}\right)$ et (CD) ne sont pas parallèles, donc leur intersection nous permet de leur position relative.

Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace ; $M\in D\left(A;\vec{u}\right)\cap(CD).\Leftrightarrow$ *il existe deux réels* α *et* β *tels que :*

$\begin{cases}x=2+\alpha\\y=3\\z=-1+\alpha\end{cases}$ et $\begin{cases}x=2-3\beta\\y=3-2\beta\\z=5\beta\end{cases}$ ce qui permet d'écrire $\begin{cases}2+\alpha=2-3\beta\\3=3-2\beta\\-1+\alpha=5\beta\end{cases}$ et $\begin{cases}2+1=2-0\\\beta=0\\\alpha=0\end{cases}$ donc $D\left(A;\vec{u}\right)\cap(CD)=\varnothing$

Et par suite : $D\left(A;\vec{u}\right)$ et (CD) ne sont pas parallèles et $D\left(A;\vec{u}\right)\cap(CD)=\varnothing$ donc elles ne sont pas coplanaires.

Exercice N°5 : $\begin{cases}x=k\\y=1-3k\\z=-2+k\\4x-y+2z-4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=k\\y=1-3k\\z=-2+k\\4k-(1-3k)+2(-2+k)-4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=k\\y=1-3k\\z=-2+k\\9k-9=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=-2\\z=-1\\k=1\end{cases}$. La droite coupe donc le plan P au point de coordonnées (1 ;-2 ;-1).

Exercice N°6: 1) a) Soit $M(x;y;z)$ un point de ξ ; $M\in D$ équivaut qu'il existe $\beta\in$ IR tel que $\overrightarrow{AM}=\beta\vec{u}$ on a :

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y+1\\z-2\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ alors $\begin{cases}x-1=\beta\\y+1=\beta\\z-2=-2\beta\end{cases}$ et par suite la représentation paramétrique de la droite D :

$\begin{cases}x=1+\beta\\y=-1+\beta\ ;\ (\beta\in IR)\\z=2-2\beta\end{cases}$

b) $B(3;2:-1)$; cherchons s'il existe un réel β tel que $\begin{cases}1+\beta=3\\-1+\beta=2\\2-2\beta=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\beta=2\\\beta=3\\\beta=\frac{3}{2}\end{cases}$ il n'existe aucun réel β qui vérifie ce système et par suite le point B n'appartient pas à D.

2) Δ est une droite définie par : $\begin{cases}x=2-\alpha\\y=3+2\alpha\ ;\ (\alpha\in IR)\\z=1+3\alpha\end{cases}$. Soit $M(x;y;z)$ un point de Δ ; $M\in\Delta\Leftrightarrow$ il existe $\alpha\in$ IR tel que $\begin{cases}x=2-\alpha\\y=3+2\alpha\\z=1+3\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=2-x\\y=3+2(2-x)\\z=1+3(2-x)\end{cases}$ un système d'équations cartésiennes de Δ est alors

$\begin{cases}y=3+2(2-x)\\z=1+3(2-x)\end{cases}$ ou encore $\begin{cases}2x+y-7=0\\3x+z-7=0\end{cases}$.

3) Soit $M(x;y;z)$ un point de ξ ; $M\in D\cap\Delta\Leftrightarrow$ il existe $(\alpha;\beta)\in IR^2$ tels que : $\left(\begin{cases}x=1+\beta\\y=-1+\beta\\z=2-2\beta\end{cases}\text{et}\begin{cases}x=2-\alpha\\y=3+2\alpha\\z=1+3\alpha\end{cases}\right)$

Soit le système (S) : $\begin{cases}1+\beta=2-\alpha\\-1+\beta=3+2\alpha\\2-2\beta=1+3\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2=1+3\alpha\\1+\beta=2-\alpha\\2\beta+3\alpha=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-1\\\beta=2\\2\beta+3\alpha=1\end{cases}$ pour $\alpha=-1$ et $\beta=2$, on obtient :

$2\beta+3\alpha=4-3=1$ (vérifié) et par suite (S) admet une unique solution $\beta;(\beta=2)$, pour $\beta=2$, on a : $(x:y;z)=(3;1;-2)$

Exercice N°7 : 1) On a $\frac{2}{1}\neq\frac{1}{1}$ donc (2 ;1 ;-2) et (1 ;1 ;3) ne sont pas proportionnelles alors les plant P et P' sont sécants. Pour déterminer leur intersection, il faut résoudre le système : $\begin{cases}2x+y-2z-3=0\\x+y+3z-2=0\end{cases}$. soit z = k.

En posant ici z = k, le système devient : $\begin{cases}2x+y=3+2k\\x+y=2-3k\end{cases}$, $k\in\mathbb{R}$. Le système obtenu est un système de deux équations à deux inconnues (x et y), on applique alors les méthodes de résolutions habituelles.

$\begin{cases}2x+y=3+2k\\x+y=2-3k\end{cases}\Leftrightarrow$

$\begin{cases}y=3+2k-2x\\x+(3+2k-2x)=2-3k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=3+2k-2x\\-x=-1-5k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=3+2k-2(1+5k)\\x=1+5k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1-8k\\x=1+5k\end{cases}$, $k\in\mathbb{R}$.

L'intersection des plans P et P' est la droite (D) de représentation paramétrique $\begin{cases}x=1+5k\\y=1-8k\\z=k\end{cases}$, $k\in\mathbb{R}$.

2) *Il s'agit dans cette question de déterminer l'intersection d'un plan et d'une droite. On doit résoudre le*

système de 4 équations à 4 inconnues : $\begin{cases} x=1+5k \\ y=1-8k \\ z=k \\ x+y-z-6=0 \end{cases}$, il suffit de remplacer x, y et z par leurs expressions en fonction de k dans la dernière équation :

$\begin{cases} x=1+5k \\ y=1-8k \\ z=k \\ x+y-z-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+5k \\ y=1-8k \\ z=k \\ (1+5k)+(1-8k)-k-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+5k \\ y=1-8k \\ z=k \\ -4k-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=9 \\ z=-1 \\ k=-1 \end{cases}$. L'intersection du plan P″ et de (D) est alors le point : I(-4 ;9 ;-1).

3) Pour chercher l'intersection de trois plans, il faut résoudre le système : $(S):\begin{cases} 2x+y-2z-3=0 \\ x+y+3z-2=0 \\ x+y-z-6=0 \end{cases}$. En utilisant la méthode de substitution, on obtient les équivalences suivantes : $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y-2z-3=0 \\ x+y+3z-2=0 \\ x+y-z-6=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x+2z+3 \\ x+(-2x+2z+3)+3z-2=0 \\ x+(-2x+2z+3)-z-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x+2z+3 \\ -x+5z+1=0 \\ -x+z-3=0 \end{cases}$ (y est exprimer en fonction de x et de z, puis remplacé dans les autres équations) $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x+2z+3 \\ x=5z+1 \\ -(5z+1)+z-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x+2z+3 \\ x=5z+1 \\ -4z-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=9 \\ x=-4 \\ z=-1 \end{cases}$. (S) admet le triplet (-4 ;9 ;-1) pour unique solution ; on retrouve les coordonnées du point I d'intersection de P″ et de (D).

Exercice N°8 : $D\begin{cases} x=2+\alpha \\ y=3+2\alpha \\ z=1+\alpha \end{cases}$; $(\alpha \in IR)$ et $D'\begin{cases} x-3z-1=0 \\ y+2z-1=0 \end{cases}$; $D'\begin{cases} x=3\beta+1 \\ y=-2\beta+1 \\ z=\beta \end{cases}$

1) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D ; $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D', $\begin{vmatrix}1 & 3\\2 & -2\end{vmatrix}=-8\neq 0$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires et par suite D et D' ne sont pas parallèles.

$A(x_0;y_0;z_0)\in D\cap D' \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=2+\alpha \\ y_0=3+2\alpha \\ z_0=1+\alpha \\ 2+\alpha-3(1+\alpha)-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=2+\alpha \\ y_0=3+2\alpha \\ z_0=1+\alpha \\ \alpha=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=1 \\ y_0=1 \\ z_0=0 \end{cases} \Rightarrow A(1;1;0)$

2) $P=P(A;\vec{u};\vec{v})$; $M(x;y;z)\in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$; $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont coplanaires $\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM};\vec{u};\vec{v})=0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 3 \\ y-1 & 2 & -2 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow (x-1)\begin{vmatrix}2 & -2\\1 & 1\end{vmatrix}-(y-1)\begin{vmatrix}1 & 3\\1 & 1\end{vmatrix}+z\begin{vmatrix}1 & 3\\2 & -2\end{vmatrix}=0$

$\Leftrightarrow 4(x-1)+2(y-1)-8z=0 \Leftrightarrow 4x-4+2y-2-8z=0$

$\Leftrightarrow 4x+2y-8z-6=0 \Leftrightarrow 2x+y-4z-3=0 \Rightarrow P: 2x+y-4z-3=0$

3) a) $Q: 2x-y-5=0$; $\overrightarrow{n_P}\begin{pmatrix}2\\1\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n_Q}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{n_P}$ et $\overrightarrow{n_Q}$ ne sont pas colinéaires car $\begin{vmatrix}2 & 2\\1 & -1\end{vmatrix}=-4\neq 0$ donc P et Q ne sont pas parallèles et par suite ils sont sécants. $M(x;y;z)\in P\cap Q \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y-4z-3=0 \\ 2x-y-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+5+y-4z-3=0 \\ 2x=y+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y-4z+2=0 \\ 2x=y+5 \end{cases}$. On pose

$x=\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x=\alpha \\ y=-5+2\alpha \\ 4z=2(-5+2\alpha)+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\alpha \\ y=-5+2\alpha \\ 4z=-8+4\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\alpha \\ y=-5+2\alpha \\ z=-2+\alpha \end{cases}$; $\alpha\in IR$

; $\Delta(B;\vec{w})$; $B(0;-5;-2)$; $W\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

b) $D(C;\vec{u});C(2,3,1)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{w}=\vec{u}$;

$C\in\Delta \Leftrightarrow \begin{cases} 2=\alpha \\ 3=-5+4=-1 \\ 1=-1+2=1 \end{cases}$ impossible donc D et Δ sont strictement parallèles.

Exercice N° 9 : 1) $H(1;2;0)$ est orthogonal à (AH) ; $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ est normal à P ; soit

$M(x;y;z)\in P \Leftrightarrow \overrightarrow{HM}.\overrightarrow{AH}=0$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2(x-1)+1(y-2)+z=0 \Leftrightarrow 2x-2+y-2+z=0 \Leftrightarrow P: 2x+y+z-4=0$

Autre méthode : $\overrightarrow{AH}$ normal à P ; $P: 2x+y+z+d=0$ on a $H(1;2;0) \in P \Leftrightarrow 2\times1+2+0+d=0 \Leftrightarrow d=-4$

D'où $P: 2x+y+z-4=0$

2) On a $2\times0+2+2-4=0 \Rightarrow B(0;2;2) \in P$ et $2\times2+4-4-4=0 \Rightarrow D(2;4;-4) \in P$

Exercice N°10 : 1) $A(1;1;2)$ et P d'équation $2x-2y+z-3=0$ donc $d(A,P) = \frac{|2-2+4-3|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{1}{3} = d$

2) $H(a,b,c)$ le projeté orthogonal de A sur P. Donc $\overrightarrow{AH}$ est normal au plan P, c'est-à-dire $\overrightarrow{AH}$ est colinéaire au vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ il existe alors $\alpha \in IR$ tel que $\overrightarrow{AH} = \alpha\vec{u}$; $\begin{cases} a-1=2\alpha \\ b-1=-2\alpha \\ c-2=\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1+2\alpha \\ b=1-2\alpha \\ c=2+\alpha \end{cases}$ et $H \in P \Rightarrow$

$2(1+2\alpha)-2(1-2\alpha)+(2+\alpha)-3=0 \Rightarrow 2+4\alpha-2+4\alpha+2+\alpha-3=0 \Rightarrow 9\alpha=1 \Rightarrow \alpha=\frac{1}{9}$.

Donc : $a=\frac{11}{9}$; $b=\frac{7}{9}$ et $c=\frac{19}{9}$ et par suite $H\left(\frac{11}{9};\frac{7}{9};\frac{19}{9}\right)$; $AH = \sqrt{\left(\frac{2}{9}\right)^2+\left(-\frac{2}{9}\right)^2+\left(\frac{1}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{9^2}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$

Exercice N°11 : 1)a) $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas colinéaires

b)On a : $P = P_{(B;(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}))}$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.Une représentation paramétrique de P est :

$\begin{cases} x=2+\alpha-3\beta & (1) \\ y=-\alpha+2\beta & (2);(\alpha;\beta) \in IR^2 \\ z=-1-2\alpha & (3) \end{cases}$; de (3), on obtient : $\alpha = -\frac{1+z}{2}$, de (2), on obtient : $2\beta = y+\alpha$ par suite

$2\beta = y-\frac{1+z}{2}$ donc $\beta = \frac{2y-1-z}{4}$; en remplaçant α et β par leurs valeurs trouvées dans (1), on obtient :

$x = 2-\frac{1+z}{2}-3\times\left(\frac{2y-1-z}{4}\right)$, une équation cartésienne du plan P est alors : $4x+6y-z-9=0$

2ième méthode : $P = P(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC})$; $M(x;y;z) \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$; $\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}$ sont coplanaires $\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}) = 0$

c) On sait que les vecteurs $\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont coplanaires si et seulement si les points A, B ; C et E sont coplanaires. On a : $E(2;-1;3)$ et $P: 4x+6y-z-9=0$; $4\times2+6\times(-1)-3-9=-10 \neq 0$ donc $E \notin P$ et par suite $\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas coplanaires.

2) a) Soit $M(x;y;z)$ un point de ξ ; $M \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-1=0 \\ z-2y-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-y \\ z=5+2y \end{cases}$; $y \in IR$;on pose $y=\alpha$, où α est un réel, on obtient $M \in \Delta \Leftrightarrow$ il existe $\alpha \in IR$ tel que : $\begin{cases} x=1-\alpha \\ y=\alpha \\ z=5+2\alpha \end{cases}$ on conclut que Δ est la droite passant par $F(1;0;5)$ et de vecteur directeur $\vec{v} = -\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$.

b) On a $E(2;-1;3)$ et $\Delta: \begin{cases} x+y-1=0 \\ z-2y-5=0 \end{cases}$; $2-1-1=2-2=0$ et $3-2\times(-1)-5=5-5=0$ donc $E \in \Delta$

c) Soit $\vec{v} = -\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$ est un vecteur directeur de Δ et $\overrightarrow{AB} = \vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$ est un vecteur directeur de (AB) ; il est clair que $\vec{v} = -\overrightarrow{AB}$, donc les droites Δ et (AB) sont parallèles.

On sait que $E \notin P$ donc $E \notin (AB)$, or E est un point de Δ on en déduit que (AB) et Δ sont distinctes. Il en résulte que (AB) et Δ sont strictement parallèles..

d) On a : $\Delta // (AB)$ et (AB) est contenu dans P alors Δ est parallèle à P. on a : $E \in \Delta$ et $E \notin P$ donc Δ et P sont strictement parallèles et par suite $\Delta \cap P = \varnothing$.

Exercice 12 : 1) a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$. On a : $\frac{0}{6}=0$ et $\frac{-6}{-6}=1 \Rightarrow \frac{0}{6} \neq \frac{-6}{-6}$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et par suite A, B et C ne sont pas alignés.

b) Soit $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ un vecteur normal de P donc $\begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{n}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-6a+6b=0\\-6a+6c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=b\\a=c\end{cases}$. On prend par exemple a = 1 donc $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Soit $M(x,y,z)\in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow (x-6)+y+z=0 \Leftrightarrow P: x+y+z-6=0$.

c) On a : $-2-2-2-6=-12\neq 0 \Rightarrow D\notin P$ donc A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

2) a) $\overrightarrow{OD}\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}=-2\vec{n}$ donc $\overrightarrow{OD}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires donc $(OD)\perp P$.

b) $M(x,y,z)\in(OD) \Leftrightarrow \begin{cases}x=-2\alpha\\y=-2\alpha;\alpha\in\mathbb{R}\\z=-2\alpha\end{cases}$

c) Soit H le projeté de O sur P. On a : $\begin{cases}\overrightarrow{OH}=\alpha\vec{n}\\H\in P\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\alpha\\y=\alpha\\z=\alpha\\x+y+z-6=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\alpha\\y=\alpha\\z=\alpha\\\alpha+\alpha+\alpha-6=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\y=2\\z=2\\\alpha=2\end{cases}$ donc

H(2,2,2). $AH=BH=CH=\frac{\sqrt{123}}{2} \Rightarrow$ H est équidistant des points A, B et C.

d) $\left.\begin{array}{l}(OD)\perp P\\(OD)\cap P=\{H\}\\HA=HB=HC\end{array}\right\} \Rightarrow (OD)$ est l'axe de cercle circonscrit du triangle ABC.

3) a) Soit I le milieu de [CD] alors $I(-1,-1,2)\in Q$. $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-2\\-2\\-8\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de Q.

Soit $M(x,y,z)\in Q \Leftrightarrow \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{CD}=0 \Leftrightarrow -2(x+1)-2(y+1)-8(z-2)=0 \Leftrightarrow x+y+4z-6=0$. Une équation de Q.

4) $\vec{n}_Q\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de Q et $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de P. On a : $\frac{1}{1}\neq\frac{1}{4}$ donc P et Q sont sécants

suivant une droite. Soit $M(x,y,z)\in P\cap Q \Leftrightarrow \begin{cases}x+y+z-6=0\\x+y+4z-6=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}z=0\\y=6-x\end{cases}$. On pose $x=\beta$, on obtient :

$$\boxed{P\cap Q:\begin{cases}x=\beta\\y=6-\beta;\ \beta\in\mathbb{R}\\z=0\end{cases}}.$$

Exercice N°13 : 1) a) G est l'isobarycentre des points A, B et C $\Leftrightarrow \begin{cases}x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3}=\frac{1}{3}\\y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}=\frac{1}{3}\\z_G=\frac{z_A+z_B+z_C}{3}=\frac{1}{3}\end{cases}$ donc $G\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

b) On a $\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, alors $\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=0$ donc $(OG)\perp(AB)$. De même $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, on a :

$\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=0$ donc $(OG)\perp(AB)$. La droite (OG) étant perpendiculaire à deux droites non parallèles de (ABC), on peut affirmer qu'elle est orthogonale au plan (ABC).

c) $M(x,y,z)\in(ABC)$ si et seulement si $(OG)\perp(AM)$, soit $\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{AM}=0$ si et seulement si $\frac{1}{3}(x-1)+\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}z=0$ si et seulement si $\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}z-\frac{1}{3}=0$ si et seulement si $x+y+z-1=0$

Donc (ABC) a pour équation cartésienne $x+y+z-1=0$.

2) a) On a $\overrightarrow{A'C'}\begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix}$, une représentation paramétrique de $(A'C')$ est : $\begin{cases}x=2-2k\\y=0\\z=3k\end{cases}$, $k\in\mathbb{R}$ .b)

$\begin{cases}x=2-2k\\y=0\\z=3k\\x+y+z-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2-2k\\y=0\\z=3k\\2-2k+0+3k-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=4\\y=0\\z=-3\\k=-1\end{cases}$ donc l'intersection de $(A'C')$ et du plan (ABC) est le point K de coordonnées (4 ;0 ;-3).

c) On a $\overrightarrow{B'C'}\begin{pmatrix}0\\-2\\3\end{pmatrix}$, une représentation paramétrique de $(B'C')$ est : $\begin{cases}x=0\\y=2-2k,k\in\mathbb{R}\\z=3k\end{cases}$.

d) $\begin{cases} x=0 \\ y=2-2k \\ z=3k \\ x+y+z-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2-2k \\ z=3k \\ 0+2-2k+3k-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=4 \\ z=-3 \\ k=-1 \end{cases}$ donc l'intersection de $(B'C')$ et du plan (ABC) est le point L de coordonnées (0 ;4 ;-3).

e) K appartient au plan (ABC) et à $(A'C')$, donc également au plan $(A'B'C')$. De même, L appartient au plan (ABC) et à $(B'C')$, donc également au plan $(A'B'C')$. Les deux plans (ABC) et $(A'B'C')$ sont sécants. Leur intersection est une droite, et contient K et L. Donc, l'intersection des plans (ABC) et $(A'B'C')$ est la droite (KL).

Exercice N° 14: $A(-1;2;1)$; $B(1;-6;-1)$ et $C(2;2;2)$

1) $M(x;y;z)\in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$; $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow d(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+1 & 2 & 3 \\ y-2 & -8 & 0 \\ z-1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow (x+1)(-8-0)-(y-2)(2+6)+(z-1)(24)=0$$

$$\Leftrightarrow -8(x+1)-8(y-2)+24(z-1)=0 \Leftrightarrow -8x-8-8y+16+24z-24=0$$

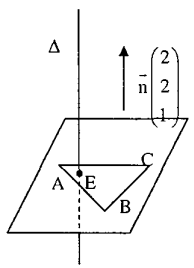
$$\Leftrightarrow -8x-8y+24z-16=0 \Leftrightarrow x+y-3z+2=0$$

2) $Q: x+y-3z+2=0$ et $Q'=(O;\vec{i};\vec{k})$.

a) $\overrightarrow{n_Q}\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{n_{Q'}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\vec{j}$ Donc Q et Q' ne sont pas parallèles et par suite Q et Q' sont sécants.

b) $M(x;y;z)\in Q\cap Q' \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-3z+2=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3z+2=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3z-2 \\ y=0 \end{cases}$ on pose $z=\alpha$ on aura :

$\Delta\begin{cases} x=-2+3\alpha \\ y=0 \\ z=\alpha \end{cases}$; $\alpha\in IR$; $\Delta(E;\vec{u})$; $E(-2;0;0)$; $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$



Exercice N° 15: 1) a)

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$; $\begin{vmatrix}-2 & -1\\1 & 1\end{vmatrix}=-2+1=-1\neq 0$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires d'où A, B et C déterminent un plan.

b) $M(x;y;z)\in(ABC) \Leftrightarrow \text{dét}(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & -2 & -1 \\ y-1 & 1 & 1 \\ z+1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=0$

$\Leftrightarrow (x-2)(-2)-(y-1)2+(z+1)(-1)=0 \Leftrightarrow -2x+4-2y+2-z-1=0 \Leftrightarrow 2x+2y+z-5=0$.

2) a) $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de Δ ; $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (ABC) ; $\vec{n}=-2\vec{u}\Rightarrow\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires d'où $\Delta\perp(ABC)$. $E(x;y;z)\in\Delta\cap(ABC) \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-t \\ y=-1-t \\ z=-4-\frac{1}{2}t \\ 2x+2y+z-5=0 \quad (4) \end{cases}$ D'après (4) on a :

$2-2t-2-2t-4-\frac{1}{2}t-5=0 \Leftrightarrow t=-2$ d'où $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \\ z=-3 \end{cases} \Rightarrow E(3;1;-3)$

b) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$ on a $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EC}$ donc ABCE est un parallélogramme.

3) a) $\begin{cases} -1=1-t \\ -3=-1-t \\ -5=-4-\frac{1}{2}t \end{cases} \Leftrightarrow t=2\Rightarrow K\in\Delta$

b) On a : $\Delta\perp(ABC)$ en E $\Rightarrow (BE)\perp\Delta$ en E donc $d(B;\Delta)=BE=\sqrt{9+1+16}=\sqrt{26}$

Exercice 16 :1) $A(0,0,0)$; $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}\Rightarrow\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $M(x,y,z)\in(AG)\Leftrightarrow\begin{cases} x=\alpha \\ y=\alpha \\ z=\alpha \end{cases}$; $\alpha\in IR$ .une représentation paramétrique de (AG)

$E(0,0,1)$; $B(1,0,0)$; $D(0,1,0)$, $\overrightarrow{EB}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{ED}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

2) a) On a : $\left.\begin{matrix}\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{EB}=1+0-1=0 \\ \overrightarrow{AG}.\overrightarrow{ED}=0+1-1=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow(AG)\perp(EBD)$

b) $\overrightarrow{AG}$ est un vecteur normale du plan (EBD)

$\Rightarrow (EBD): x+y+z+d=0$ or $E(0,0,1)\in(EBD) \Rightarrow 0+0+1+d=0 \Rightarrow d=-1$

2eme méthode Le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est un vecteur orthogonal au plan (BDE). Par conséquent, un point M appartient à (BDE) si et seulement si $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{AM}=0$. Soit M(x,y,z). On en déduit : un point M appartient à (BDE) si et seulement si $1\times\left(x-\frac{1}{3}\right)+1\times\left(y-\frac{1}{3}\right)+1\times\left(z-\frac{1}{3}\right)=0$. Une équation cartésienne du plan (BDE) est donc : $x+y+z-1=0$.

c)soit $M(x,y,z)\in(EBD)\cap(AG) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x=\alpha & \boxed{1} \\ y=\alpha & \boxed{2} \\ z=\alpha & \boxed{3} \\ x+y+z-1=0 & \boxed{4} \end{cases} \quad \boxed{4} \Rightarrow 3\alpha-1=0 \Rightarrow \alpha=\frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=\frac{1}{3} \\ z=\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow L\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$$

Exercice N° 17: $D\begin{cases} x=2+\alpha \\ y=3+2\alpha \\ z=1+\alpha \end{cases}$; $(\alpha\in IR)$ *et* $D'\begin{cases} x-3z-1=0 \\ y+2z-1=0 \end{cases}$

1) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D ; $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D', $\begin{vmatrix}1 & 1\\2 & 3\end{vmatrix}\neq 0$ Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires et par suite D et D' ne sont pas parallèles.

$A(x_0;y_0;z_0)\in D\cap D' \Leftrightarrow D\begin{cases} x_0=2+\alpha \\ y_0=3+2\alpha \\ z_0=1+\alpha \end{cases}$ et $\begin{cases} x_0=1 \\ y_0=1 \\ z_0=0 \end{cases} \Rightarrow A(1;1;0)$

2) $P=P(A;\vec{u};\vec{v})$; $M(x;y;z)\in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$; $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont coplanaires

$$\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM};\vec{u};\vec{v})=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 3 \\ y-1 & 2 & -2 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow (x-1)\begin{vmatrix}2 & -2\\1 & 1\end{vmatrix}-(y-1)\begin{vmatrix}1 & 3\\1 & 1\end{vmatrix}+z\begin{vmatrix}1 & 3\\2 & -1\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow$$

$4(x-1)+2(y-1)-8z=0 \Leftrightarrow 4x-4+2y-2-8z=0 \Leftrightarrow 2x+y-4z+1=0 \Rightarrow P: 2x+y-4z+1=0$

3) $Q: 2x-y-5=0$; $\overrightarrow{n_P}\begin{pmatrix}2\\1\\-4\end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{n_Q}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{n_P}$ *et* $\overrightarrow{n_Q}$ ne sont pas colinéaires donc P et Q ne sont pas

parallèles et par suite ils sont sécants. $M(x;y;z)\in P\cap Q \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y-4z+1=0 \\ 2x-y+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+5+y-4z+1=0 \\ 2x=4+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y-4z+6=0 \\ 2x=y+5 \end{cases}$.

On pose $x=\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x=\alpha \\ y=-5+2\alpha \\ 4z=2(-5+2\alpha)+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\alpha \\ y=-5+2\alpha \\ 4z=-4+4\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\alpha \\ y=-5+2\alpha \\ z=-1+\alpha \end{cases}$; $\alpha\in IR$;

$\Delta(B;\vec{w})$; $B(0;-5;-1)$; $W\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

b) $D(C;\vec{u})$; $C\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ *et* $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{w}=\vec{u}$ $C\in\Delta \Leftrightarrow \begin{cases} 2=\alpha \\ 3=-5+4 \\ 1=-1+2 \end{cases}$ *impossible* donc D et Δ sont strictement parallèles.

Exercice N°18 : 1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{KC}\begin{pmatrix}1\\4\\5\end{pmatrix}$. Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, $\vec{u}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{AB}$ et au vecteur $\overrightarrow{AC}$ si et seulement si : $\vec{u}.\overrightarrow{AB}=\vec{u}.\overrightarrow{AC}=0$ ce qui traduit le système : $\begin{cases} 3a+b+4c=0 \\ a+4b+5c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(-4b-5c)+b+4c=0 \\ a=-4b-5c \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b=-c \\ a=-c \end{cases}$. Conclusion : Tout vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-c\\-c\\c\end{pmatrix}$, c désignant un réel quelconque non nul, est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{AB}$ et au vecteur $\overrightarrow{AC}$. Par exemple, on prend c = 1, on obtient $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

2) Soit M(x,y,z) un point de l'Espace. $M\in P \Leftrightarrow \vec{u}.\overrightarrow{AM}=0 \Leftrightarrow 1\times(x+1)+1\times(y+1)-1\times z=0$

$\Leftrightarrow x+y-z+2=0$. Conclusion : Une équation du plan P est $x+y-z+2=0$.

3) On calcule $x+y-z+2$ avec les coordonnées de l'origine : 0 + 0 – 2 + 2 = 2. On en conclut que le demi-espace ouvert E de frontière P et contenant l'origine est caractérisé par l'inéquation $x+y-z+2>0$.

On calcule $x+y-z+2$ avec les coordonnées de K : 3 + 2 -4 +2 = 3 > 0 donc $K\in E$.

On calcule $x+y-z+2$ avec les coordonnées de N : -5 -1 -0 +2 = -4 <0 donc $N\notin E$.

On calcule $x+y-z+2$ avec les coordonnées de Q : 2 + 5 – 9 +2 = 0 donc $Q\in P$ et $Q\notin E$.

4) $d(O,P)=\frac{|0+0-0+2|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow d(O,P)=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

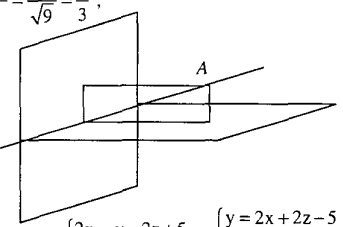
Exercice N° 19 : $(P): 2x-y+2z-5=0$; $(P'): 2x+2y-z-4=0$

1) On désigne par $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ un vecteur normal à P et $\vec{n'}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ un vecteur normal à P' ; On a

$\vec{n}\,.\,\vec{n'}=2\times2+(-1)\times2+2\times(-1)=4-2-2=0$ donc $\vec{n}\perp\vec{n'}$ et par suite $P\perp P'$

2) $A(1;2;-1)$; $P\cap P'=D$; $d(A;P)=\dfrac{|2\times1-2+2\times(-1)-5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=\dfrac{|-7|}{\sqrt{9}}=\dfrac{7}{3}$;

$d(A;P')=\dfrac{|2+4+1-4|}{\sqrt{4+4+1}}=\dfrac{|3|}{\sqrt{9}}=\dfrac{3}{3}=1$



$d(A;D)^2=d(A;P)^2+d(A;P')^2=\left(\dfrac{7}{3}\right)^2+1^2=\dfrac{49}{9}+\dfrac{9}{9}=\dfrac{58}{9}$

$M(x;y;z)\in D\Leftrightarrow\begin{cases}2x-y+2z-5=0\\2x+2y-z-4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x=y-2z+5\\y-2z+5+2y-z-4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x=y-2z+5\\3y-3z+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2x+2z-5\\y=z-\dfrac{1}{3}\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}z-\dfrac{1}{3}=2x+2z-5\\y=z-\dfrac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=-2x+5-\dfrac{1}{3}\\y=z-\dfrac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=z-\dfrac{1}{3}\\z=-2x+\dfrac{14}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-2x+\dfrac{14}{3}-\dfrac{1}{3}\\z=-2x+\dfrac{14}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-2x+\dfrac{13}{3}\\y=-2x+\dfrac{14}{3}\end{cases}$ On pose

$x=\alpha$ on aura $D:\begin{cases}x=\alpha\\y=\dfrac{13}{3}-2\alpha\\z=\dfrac{14}{3}-2\alpha\end{cases}$; $\alpha\in IR$ b) $M(x;y;z)\in D\Leftrightarrow\begin{cases}x=\alpha\\y=\dfrac{13}{3}-2\alpha\\z=\dfrac{14}{3}-2\alpha\end{cases}$

; $AM=\sqrt{(-1+\alpha)^2+\left(\dfrac{17}{3}-2\alpha\right)^2+\left(\dfrac{17}{3}-2\alpha\right)^2}\Leftrightarrow AM^2=9\alpha^2-42\alpha+\dfrac{467}{9}$.

Soit $f(\alpha)=9\alpha^2-42\alpha+\dfrac{467}{9}$; $f'(\alpha)=18\alpha-42=6(3\alpha-7)$

	$-\infty$		$\frac{7}{3}$		$-\infty$
$f'(\alpha)$		$-$	0	$+$	
$f(\alpha)$	$+\infty$	↘	$f\left(\frac{7}{3}\right)$	↗	$+\infty$

AM est minimale pour $\alpha=\dfrac{7}{3}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{7}{3}\\y=\dfrac{13}{3}-\dfrac{14}{3}=-\dfrac{1}{3}\\z=\dfrac{14}{3}-\dfrac{14}{3}=0\end{cases}\Rightarrow M_0\left(\dfrac{7}{3}\ ;\ -\dfrac{1}{3}\ ;\ 0\right)$

Exercice N° 20: $P_m:(m-1)x+my+(2-m)z+3m-1=0$

1) Soit $m\in IR$. On a : $m-1=0\Leftrightarrow m=1$. Par suite, pour tout réel m, on a : $(m-1;m;2-m)=(0;1;-1)\neq(0;0;0)$; d'où pour tout réel m ; P_m est un plan.

2) $D:\begin{cases}x=-3+2\alpha\\y=1+3\alpha\\z=-1+\alpha\end{cases}$;$(\alpha\in IR)$

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D. On a $D//P_m\Leftrightarrow\vec{u}$ est un vecteur de $P_m\Leftrightarrow2(m-1)+3m+(2-m)=0$

$\Leftrightarrow m=0$ On conclut que D et P_m sont parallèles si et seulement si $m=0$

b) * Si D est contenue dans un plan P_m alors D est parallèle à ce plan P_m par suite $m=0$, voyons si D est contenue dans P_0 : on a D est parallèle à P_0 ; $B(-3;1;-1)$ est un point de D ; P_0 est définie par : $-x+2z-1=0$, on a : $3-2-1=0$ donc B appartient à P_0. Il en résulte que D est contenue dans le plan P_0.

3) 1er méthode : S'il existe une droite contenue dans tous les plans P_m alors cette droite est contenue dans deux plans P_m particuliers, par exemple : P_0 et P_1. Etudions $P_0\cap P_1$ Soit $M(x;y;z)$ un point de ξ ;

$M\in P_0\cap P_1\Leftrightarrow\begin{cases}-x+2z-1=0\\y+z+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1+2z\\y=-2-z\end{cases}$ On pose $z=\alpha$;où $\alpha\in IR$ on obtient $M=P_0\cap P_1$ si et seulement si il existe $\alpha\in IR$ tel que : $\begin{cases}x=-1+2\alpha\\y=-2-\alpha\\z=\alpha\end{cases}$. Il en résulte que : P_0 et P_1 est la droite Δ dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases}x=-1+2\alpha\\y=-2-\alpha\\z=\alpha\end{cases}$;$(\alpha\in IR)$

Vérifions que Δ est contenue dans tous les plans P_m. Soit M un point quelconque de Δ, M a pour coordonnées $(-1+2\alpha;-2-\alpha;\alpha)$ où $\alpha\in IR$. Pour tout réel m et pour tout réel α, on a :

$(m-1)(-1+2\alpha)+m(-2-\alpha)+(2-m)\alpha+3m-1=(2m-2-m-2-m)\alpha-m+1-2m+3m-1=0$ Par suite, pour tout réel m, M appartient à P_m. On en déduit que Δ est contenue dans tous les plans P_m.

2ième méthode : Soit $M(x;y;z)$ un point de ξ On peut écrire $M \in P_m \Leftrightarrow (m-1)x+my+(2-m)z+3m-1=0$ $\Leftrightarrow m(x+y-z+3)-x+2z-1=0$. M appartient à tous les plans P_m si et seulement si (pour tout réel m ; $m(x+y-z+3)-x+2z-1=0$) On obtient (M appartient à tous les plans P_m) $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z+3=0 \\ -x+2z-1=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y+z+2=0 \\ x=2z-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1+2z \\ y=-2-z \\ z\in IR \end{cases} \Leftrightarrow$ il existe $\alpha \in IR$ tel que : $\begin{cases} x=-1+2\alpha \\ y=-2-\alpha \\ z=\alpha \end{cases}$. Il en résulte que tous les plans P_m contiennent la droite Δ définie par : $\begin{cases} x=-1+2\alpha \\ y=-2-\alpha \\ z=\alpha \end{cases}$;$(\alpha \in IR)$

4) $D' = D_{(A;\vec{u})}$ où $A(0;-2;1)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$.

a) D' est définie par : $\begin{cases} x=\beta \\ y=-2+\beta \\ z=1+2\beta \end{cases}$;$(\beta \in IR)$. Soit $M(x;y;z)$ un point de ξ ; $M \in D \cap \Delta \Leftrightarrow$ il existe $(\alpha;\beta) \in IR^2$ tel que : $\begin{cases} x=-1+2\alpha \\ y=-2-\alpha \\ z=\alpha \end{cases}$ et $\begin{cases} x=\beta \\ y=-2+\beta \\ z=1+2\beta \end{cases}$. On a : $\begin{cases} -1+2\alpha=\beta \\ -2-\alpha=-2+\beta \\ \alpha=1+2B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+3\alpha=2 \\ \beta=-\alpha \\ \alpha-2\beta=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\frac{1}{3} \\ \beta=-\frac{1}{3} \end{cases}$

il en résulte que $D \cap \Delta = \{I\}$ avec $I\left(-\frac{1}{3};-\frac{7}{3};\frac{1}{3}\right)$

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$; $P_m : (m-1)x+my+(2-m)z+3m-1=0$. Soit $m \in IR$ On a :

$(m-1)\times 1+m\times 1+2\times(2-m)=3 \neq 0$ donc $\vec{u}$ n'est pas un vecteur de P_m, par suite D' n'est pas parallèle à P_m. IL en résulte que, pour tout réel m, D4 et P_m sont sécants (1). D'après 3), on a Δ est contenue dans tous les plans P_m et d'après 4), on a : $D' \cap \Delta = \{I\}$. I appartient alors à D' et à tous les plans P_m (2).

De (1) et (2), on déduit que, pour tout réel m, $D' \cap P_m = \{I\}$; où $I\left(-\frac{1}{3};-\frac{7}{3};\frac{1}{3}\right)$.

Exercice N° 21 : 1) $I(0;2,0)$ .2) $\begin{cases} M(a;0;0) \\ A(0;0;0) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = a\vec{i}$ or $0<a<2$ alors M décrit le segment $[AC]$ privé de A et de C

On remarque que : $\overrightarrow{AC} = 2\vec{i}$

3) a) $I(0;2;0)$; $M(a;0;0)$; $\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix}a\\-2\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P, Ainsi il existe $d \in IR$ tel que :

$P : ax-2y+d=0$; on a $I \in P \Leftrightarrow -4+d=0 \Leftrightarrow d=4$ D'où $P : ax-2y+4=0$

b) $\overrightarrow{BS}\begin{pmatrix}0\\-3\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (BS), Ainsi (BS): $\begin{cases} x=0 \\ y=4-3\alpha ; \alpha \in IR \\ z=4\alpha \end{cases}$

c) Soit $N(x;y;z)$ un point de l'espace ; $N \in (BS) \cap P$ équivaut à il existe $\alpha \in IR$ tel que : $\begin{cases} x=0 \\ y=4-3\alpha \\ z=4\alpha \\ ax-2y+4=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x=0 \\ y=4-3\alpha \\ z=4\alpha \\ -2(4-3\alpha)+4=0 \end{cases}$;$\alpha \in IR \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\frac{2}{3} \\ x=0 \\ y=2 \\ z=\frac{8}{3} \end{cases}$ donc $N\left(0;2;\frac{8}{3}\right)$ Ainsi N est fixe.

Exercice N°22 : $mx+2y-m^2z+3=0$

1) a) $A(2;0;1)$ On a $A \in P_m \Leftrightarrow 2m-m^2+3=0 \Leftrightarrow m=-1$ ou $m=3$ d'où $A \in P_m$ si et seulement si $m \in \{-1;3\}$

b) P_1 et P_{-1} sont définis respectivement par : $P_1 : x+2y-z+3=0$ et $P_{-1} : -x+2y-z+3=0$. Soit $M(x;y;z)$ un point de ξ ; $M \in P_1 \cap P_{-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z+3=0 \\ -x+2y-z+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=0 \\ x+2y-z+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ z=3+2y \\ y\in IR \end{cases}$

on pose $y=\alpha$ où $\alpha \in IR$. On a alors $M \in P_1 \cap P_{-1} \Leftrightarrow$ il existe $\alpha \in IR$ tel que $\begin{cases} x=0 \\ y=\alpha \\ z=3+2\alpha \end{cases}$

il en résulte que $P_{-1} \cap P_1$ est la droite D passant par $C(0;0;3)$ et de vecteur directeur $\vec{v}=\vec{j}+2\vec{k}$

c) S'il existe un point appartient à tous les plans P_m alors ce point appartient aux trois plans P_{-1} ; P_0 et P_1

On a $P_{-1}\cap P_1 = D$ donc $P_{-1}\cap P_1\cap P_0 = D\cap P_0$. Soit $M(x;y;z)$ un point de ξ ; $M\in D\cap P_m \Leftrightarrow$ il existe $\alpha\in IR$ tel que $\begin{cases} x=0 \\ y=\alpha \\ z=3+2\alpha \end{cases}$ et $2y+3=0$. On a : $2\alpha+3=0 \Rightarrow \alpha=-\frac{3}{2}$. On obtient $D\cap P_0=\{B\}$ et par suite $P_{-1}\cap P_1\cap P_0=\{B\}$ avec $B\left(0;-\frac{3}{2};0\right)$

Vérification que B appartient à tous les plans P_m, $B\left(0;-\frac{3}{2};0\right)$ et $mx+2y-m^2z+3=0$ pour tout réel m on a $m\times 0+2\times\left(-\frac{3}{2}\right)-m^2\times 0+3=-3+3=0$ donc pour tout réel m, $B\in P_m$ On conclut que tous les plans P_m passent par le point fixe $B\left(0;-\frac{3}{2};0\right)$.

d) On sait que B appartient à tous les plans P_m. Pour chaque plan P_m on a donc (AB) est soit contenue dans P_m soit sécante à P_m, d'après 1) a) les seuls plans contenant A sont P_{-1} et P_3.

On en déduit les résultats suivants :

- Si $m\in\{-1;3\}$, alors A appartient à P_m par suite (AB) est contenue dans P_m
- Si $m\in IR\setminus\{-1;3\}$, alors A n'appartient à P_m par suite (AB) et P_m sont sécants en B.

2) $\Delta = D_{(B;\vec{u})}$ où $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$

a) Montrons que (OA) et Δ ne sont pas coplanaires ; $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$; $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. On a $\begin{vmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{vmatrix}=2\neq 0$, donc $\overrightarrow{OA}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires, par suite Δ et (OA) ne sont pas parallèles.

Etudions $(OA)\cap\Delta$. Soit $M(x;y;z)$ un point de ξ $M\in(OA)\cap\Delta \Leftrightarrow$ il existe $(\alpha;\beta)\in IR^2$ tel que :

$\begin{cases} x=2\alpha \\ y=0 \\ z=\alpha \end{cases}$ et $\begin{cases} x=\beta \\ y=-\frac{3}{2}+\beta \\ z=\beta \end{cases}$. On a : $(S):\begin{cases} 2\alpha=\beta \\ 0=-\frac{3}{2}+\beta \\ \alpha=\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=\frac{3}{2} \\ \alpha=\frac{3}{2} \\ 2\alpha-\beta=0 \end{cases}$ pour $\alpha=\frac{3}{2}$ et $\beta=\frac{3}{2}$; $2\alpha-\beta=3-\frac{3}{2}\neq 0$. Le système (S) n'admet aucune solution $(\alpha;\beta)$, donc $(OA)\cap\Delta=\varnothing$; (OA) et Δ ne sont pas parallèles et $(OA)\cap\Delta=\varnothing$. On conclut que (OA) et Δ ne sont pas coplanaires.

b) On a (OA) est contenue sans Q et Δ est parallèle à Q donc O est un point de Q ; $\overrightarrow{OA}$ et $\vec{u}$ sont des

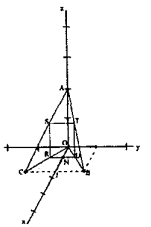
vecteurs de Q. On sait que $\overrightarrow{OA}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires. On a alors : $Q: P_{(O;(\overrightarrow{OA};\vec{u}))}$, une représentation paramétrique de Q est : $\begin{cases} x=2\alpha+\beta & (1) \\ y=\beta & (2) \\ z=\alpha+\beta & (3) \end{cases}$; $(\alpha;\beta)\in IR^2$ en effectuant : $(1)-2\times(3)+(2)$. On obtient : $x-2z+y=0$ d'où une équation cartésienne de Q est : $x+y-2z=0$

c) $P_m : mx+2y-m^2z+3=0$. On sait que : $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ sont des vecteurs non colinéaires de Q. On a :

$Q // P_m \Leftrightarrow (\overrightarrow{OA}$ et $\vec{u}$ sont des vecteurs de $P_m) \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-m^2=0 \\ m+2-m^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m(2-m)=0 \\ m^2-m-2=0 \end{cases}$ Or $(m(2-m)=0 \Leftrightarrow m=0$ ou $m=2)$ et $(m^2-m-2=0 \Leftrightarrow m=-1$ ou $m=2)$ On conclut que Q et P_m sont parallèles si et seulement si $m=2$.

Exercice N° 23: 1) $B(\sqrt{3};1;0)$; $C(\sqrt{3};-1;0)$. I est le milieu de $[BC]$ alors $I(\sqrt{3};0;0)$.

2) O et J sont deux points de l'axe $(O;\vec{i})$ d'abscisses respectives 0 et $\sqrt{3}$ et $N\in[OJ]$ par conséquent $t\in[0;\sqrt{3}]$.



3) a) $\vec{i}$ est un vecteur normal à P. alors il existe $d\in IR$ tel que $P: x+d=0$; $N(t;0;0)$ appartient à P et par suite $P: x=t$. $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\-1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (OC) ainsi $(OC):\begin{cases} x=\sqrt{3}\alpha \\ y=-\alpha \\ z=0 \end{cases}$; $\alpha\in IR$

soit $R(x;y;z)$ un point de l'espace ; $R\in(OC)\cap P$ équivaut à, il existe $\alpha\in IR$ tel que $\begin{cases} x=\sqrt{3}\alpha \\ y=-\alpha \\ z=0 \\ x=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=t \\ y=-\frac{t}{\sqrt{3}} \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow R\left(t;-\frac{t}{\sqrt{3}};0\right)$. On vérifie de même que :

$(AC):\begin{cases} x=\sqrt{3}\beta \\ y=-\beta \\ z=2-2\beta \end{cases}$; $\beta\in IR$; $(AB):\begin{cases} x=\sqrt{3}\gamma \\ y=\gamma \\ z=2-2\gamma \end{cases}$; $\gamma\in IR$; $(OB):\begin{cases} x=\sqrt{3}\lambda \\ y=\lambda \\ z=0 \end{cases}$; $\lambda\in IR$. On montre que :

$S\left(t;-\frac{t}{\sqrt{3}};2-\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)$; $T\left(t;\frac{t}{\sqrt{3}};2-\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)$; $U\left(t;\frac{t}{\sqrt{3}};0\right)$ ainsi que $\overrightarrow{RS}\begin{pmatrix}0\\0\\2-\frac{2t}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{RU}\begin{pmatrix}0\\\frac{2t}{\sqrt{3}}\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{UT}\begin{pmatrix}0\\0\\2-\frac{2t}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$

Des égalités $\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{UT}$ et $\overrightarrow{RS}.\overrightarrow{RU}=0$ on déduit que RSTU est un rectangle.

b) $\mathcal{A}(t)=RS\times RU=\left|2-\frac{2t}{\sqrt{3}}\right|\left|\frac{2t}{\sqrt{3}}\right|=\frac{4\left|\sqrt{3}-t\right||t|}{3}$ or $t\in\left[0;\sqrt{3}\right]$ alors

$\left|\sqrt{3}-t\right|=\sqrt{3}-t$ et $|t|=t$ par suite $\mathcal{A}(t)=\frac{4}{3}t\left(\sqrt{3}-t\right)$.

t	0		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
$\mathcal{A}'(t)$		$+$	0	$-$	
$\mathcal{A}(t)$		$\nearrow$	1	$\searrow$	0

c) Soit $\mathcal{A}$ $t\mapsto\frac{4}{3}t\left(\sqrt{3}-t\right)$. ; $\mathcal{A}$ est dérivable sur $\left[0;\sqrt{3}\right]$ et

$\mathcal{A}'(t)=-\frac{8}{3}t+\frac{4\sqrt{3}}{3}$ Ainsi $\mathcal{A}(t)$ est maximale lorsque $t=\frac{\sqrt{3}}{2}$

c'est-àdire lorsque N est le milieu de $[OJ]$ Pour $t=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\overrightarrow{RS}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{RU}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ par conséquent RS = RU. Donc

Lorsque $\mathcal{A}(t)$ est maximale le quadrilatère RSTU est un carré.

Exercice n°24 : $(O,\vec{j},\vec{j},\vec{k})$ est un repère orthonormé de ζ A (1,2,2) ; B (3,2,1) ; C (1,3,3) ; E (2,0,4).

1) a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ On a : $\begin{vmatrix}2&0\\0&1\end{vmatrix}=2\neq0$, donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, par suite les points A,B et C déterminent un plan P.

b) Montrons que (AE) est perpendiculaire à P . $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB}=2-2=0$, donc $\overrightarrow{AE}\perp\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AC}=-2+2=0$, donc $\overrightarrow{AE}\perp\overrightarrow{AC}$ .On a alors : $\begin{cases}(AE)\perp(AB)\\(AE)\perp(AC)\end{cases}$; (AB) et (AC) sont deux droites sécantes de P ; il en résulte que la droite (AE) est perpendiculaire à P.

c) De 1) b) , on déduit que $\overrightarrow{AE}$ est un vecteur normal a P, une équation cartésienne de P est alors de la forme : $x-2y+2z+d=0$.A(1,2,2) appartient à P , donc $1-4+4+d=0$; par suite $d=-1$.
Une équation cartésienne de P est alors : $x-2y+2z-1=0$.
2) Q_m : $(m-1)x-(1+m)y+mz+2=0$; $m\in IR$.
a) Montrons que Q_m et P sont sécants ; ($m\in IR$) soit m un réel.

$\vec{N}_m\begin{pmatrix}m-1\\-(1+m)\\m\end{pmatrix}$ et $\vec{N}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ sont des vecteurs normaux respectifs à Q_m et à P.

Si Q_m et P sont parallèles alors $\vec{N}_m$ et $\vec{N}$ sont colinéaires , donc : $\frac{-(1+m)}{-2}=\frac{m}{2}$ .Par suite : 1+m =m , ce qui est impossible.Par suite Q_m et P ne sont pas parallèles donc Q_m et P sont sécants.
Ainsi, pour tout réel m , Q_m et P sont sécants.
b) Déterminons m pour que : $C\in Q_m$.
C(1,3,3) . On a : $C\in Q_m\Leftrightarrow m-1-3(1+m)+3m+2=0\Leftrightarrow m-2=0\Leftrightarrow m=2$

3) $\Delta=Q_2\cap P$; $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$

P : $x-2y+2z-1=0$; Q_2 : $x-3y+2z+2=0$ On a : $2-2.0+2(-1)=2-2=0$
Donc $\vec{u}$ est un vecteur de P.On a : $2-3.0+2(-1)=2-2=0$; donc $\vec{u}$ est un vecteur de Q_2 .
$\vec{u}$ est alors un vecteur des deux plans P et Q_2 , par suite $\vec{u}$ est un vecteur de Δ.
* D'après 2)c) , on a C appartient à Q_2 ; on sait que C appartient à P ; par suite C appartient à Δ.
Δ est alors la droite $D_{(C,\vec{u})}$. Une représentation paramétrique de Δ est :

Alors : $\begin{cases}x=1+2\alpha\\y=3\\z=3-\alpha\end{cases}$; $(\alpha\in IR)$

4) M(2k + 1,3,3 – k) ; où $k\in IR$.

a) $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}2k\\1\\1-k\end{pmatrix}$; $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$.On sait que : $\overrightarrow{AM}\perp\vec{u}\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\vec{u}=0$ .Or : $\overrightarrow{AM}.\vec{u}=4k-(1-k)=5k-1$.

On a alors : $\overrightarrow{AM}\perp\vec{u}\Leftrightarrow5k-1=0\Leftrightarrow k=\frac{1}{5}$.

b) On reconnaît que M(2k + 1,3,3 – k) , où $k\in IR$, est un point de la droite Δ.D'après 4)a) et pour $k=\frac{1}{5}$, on a : $\overrightarrow{AM}\perp\vec{u}$ .Désignons par H le point M correspondant à $k=\frac{1}{5}$; $H(\frac{7}{5},3,\frac{14}{5})$.

On a $\overrightarrow{AH}\perp\vec{u}$, donc H appartient au plan P' passant par A et perpendiculaire à Δ , on en déduit que H est le projeté orthogonal de A sur la droite Δ , par suite : d(A, Δ) = AH.

On a : A(1,2,2) ; $H\left(\frac{7}{5},3,\frac{14}{5}\right)$.On obtient alors : $d(A,\Delta)=\sqrt{\frac{4}{25}+1+\frac{16}{25}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

Exercice N° 25 : $\overrightarrow{OA}=3\vec{i}$; $\overrightarrow{OC}=\vec{k}$; $\overrightarrow{OB}=2\vec{j}$; H est le projeté orthogonal de O sur (ABC)

1) a) $(ABC): 2x+3y+6z-6=0$

b) $\begin{cases}\overrightarrow{OH}=\alpha\overrightarrow{n_P}\\ H\in(ABC)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x_H+3y_H+6z_H-6=0\\ x_H=2\alpha\\ y_H=3\alpha\\ z_H=6\alpha\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4\alpha+9\alpha+36\alpha-6=0 \Leftrightarrow \alpha=\frac{6}{49}\\ x_H=\frac{12}{49}\\ y_H=\frac{18}{49}\\ z_H=\frac{36}{49}\end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{12}{49};\frac{18}{49};\frac{36}{49}\right)$

2) $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}\frac{135}{49}\\ \frac{18}{49}\\ \frac{36}{49}\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=-\frac{36}{49}+\frac{36}{49}=0 \Rightarrow \overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}\frac{12}{49}\\ -\frac{80}{49}\\ \frac{36}{49}\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=-\frac{36}{49}+\frac{36}{49}=0 \Rightarrow \overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{AC}$ et par suite H est l'orthocentre du triangle

Exercice N° 26: 1) a) $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$; $CA^2+CB^2=4+4+1=9$;

$AB^2=4+4+1=9$; $CA^2+CB^2=AB$ donc ABC est un triangle rectangle en C.

b) $P=(ABC)$; $M(x;y;z)\in P \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}x+1 & 2 & 0\\ y & 0 & 2\\ z-1 & 0 & 1\end{vmatrix}=0$

$(x+1)(0-0)-y(2-0)+(z-1)(4-0)=0 \Leftrightarrow -2y+4z-4=0 \Leftrightarrow y-2z+2=0 \Rightarrow P: y-2z+2=0$

2) Δ est de vecteur directeur $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$ et passant par $I=A*B$; $I\left(0;1;\frac{3}{2}\right)$; $\Delta:\begin{cases}x=0\\ y=1+\alpha\\ z=\frac{3}{2}-2\alpha\end{cases}$ $\alpha\in IR$

3) $Q=\{M\in\zeta \ / \ \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=-3\}$, $M\in Q \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=-3 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y\\z-1\end{pmatrix}.\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}=-3$

$\Leftrightarrow -2(x-1)+2y+1(z-1)=-3 \Leftrightarrow -2x+2y+z+4=0 \Rightarrow Q: -2x+2y+z+4=0$

$\overrightarrow{h_Q}\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$ est normal à Q ; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$ on a : $\overrightarrow{h_Q}=\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AB}$ est normal à Q donc $Q\perp(AB)$.

4) a) Δ est de vecteur directeur $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{n_Q}.\vec{n}=0+2-2=0$ donc $\vec{n}\perp\overrightarrow{n_Q}$ et par suite $\Delta // Q$

b) $M\in\Delta$; puisque $\Delta // Q$ donc $d(\Delta;Q)=d(M;Q)$; pour tout point $M\in\Delta$ en particulier $M\left(0;1;\frac{3}{2}\right)$;

$d(M;Q)=d(I;Q)=\frac{\left|-2\times0+2\times1+\frac{3}{2}+4\right|}{\sqrt{4+4+1}}=\frac{\left|\frac{15}{2}\right|}{\sqrt{9}}=\frac{\frac{15}{2}}{3}=\frac{5}{2}$

Exercice N°27 : 1) Les triplets (1 ;-1,0) et (0 ;1 ;-1) ne sont pas proportionnels donc les plans P_θ et Q_θ sont sécants suivant un droite Δ_θ. $\Delta_\theta\begin{cases}x-y+\sin^2\theta=0 & (1)\\ y-z+\cos^2\theta=0 & (2)\end{cases}$. (1) + (2) donne

$x+\sin^2\theta-z+\cos^2\theta=0$ sig $x-z+1=0$ sig $z=x+1$. (1) donne $y=\sin^2\theta+x$.

En posant $x=\alpha$, on aura $\Delta_\theta:\begin{cases}x=\alpha\\ y=\sin^2\theta+\alpha, \alpha\in\mathbb{R}\\ z=1+\alpha\end{cases}$.

2) a- Vrai : pour $\alpha=-1$: $\begin{cases}x=-1\\ y=\sin^2\theta-1=-\cos^2\theta\\ z=1+(-1)=0\end{cases}$.

b- Vrai : Soit $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur de Δ_θ. $\vec{u}.\vec{v}=1\times1-1\times1=1-1=0$ donc $\vec{u}\perp\vec{v}$.

c- Vrai : $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à R.

d- Faux. $\vec{k}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $(O,\vec{i},\vec{j})$ et $\vec{v}.\vec{k}=1\neq 0$ donc $\vec{k}\not\perp\vec{v}$.

Exercice 28: 1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$ $b'-ba'\neq 0\Rightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas linéaires ; d'où A, B et C ne sont pas alignés

(ABC) est un plan dont le repère est $(C,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$

$(ABC):\begin{cases}x=-2\alpha-\beta\\ y=1-\alpha\\ z=\frac{1}{4}+\alpha\end{cases}$,on aura $\begin{array}{l}\alpha=1-y\\ \beta=-x-2\Rightarrow\alpha=-x+2y-2\\ z=1+2-2y-2x+4y-4\\ (ABC):2x-2y+z+1=0\end{array}$

2) $D:\begin{cases}x=2\alpha\\ y=-2\alpha\\ z=-\frac{1}{4}+\alpha\end{cases}$;$\alpha\in IR$. Soit $M(2\alpha,-2\alpha,-\frac{1}{4}+\alpha)$ un point quelconque de D

$MA=(2\alpha-1)^2+(2\alpha+1)^2+(\alpha+\frac{3}{4})^2=9\alpha^2+\frac{3}{2}\alpha+\frac{41}{16}$, $MB=(2\alpha+1)^2+(2\alpha)^2+(\alpha-\frac{5}{4})^2=9\alpha^2+\frac{3}{2}\alpha+\frac{41}{16}$

$MC=(2\alpha)^2+(2\alpha+1)^2+(\alpha-\frac{5}{4})^2=9\alpha^2+\frac{3}{2}\alpha+\frac{41}{16}\ \forall M\in D$, $MA=MB=MC$

D'où D est l'axe de cercle ζ circonscrit au triangle ABC

Exercice N° 29: 1) $M(x;y;z)\in P\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x-1&0&-1\\y-1&-1&0\\z&1&1\end{vmatrix}=0$

$\Leftrightarrow(x-1)(-1)-(y-1)(1)+z(-1)=0\Leftrightarrow -x+1-y+1-z\ \Rightarrow P:x+y+z-2=0$

2) On a : $0+0-2=-2\pm 0\Rightarrow O(0;0;0)\notin P\Rightarrow$ OABC est un tétraèdre ;

$OA=OB=OC=\sqrt{2}$; $AB=AC=BC=\sqrt{2}$ donc OABC est un tétraèdre régulier.

3) Δ passant par O et perpendiculaire à P, soit $O'=\Delta\cap P$

Δ passant par O et de vecteur directeur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$; $O'(x_0;y_0;z_0)\in\Delta\cap P\Leftrightarrow\begin{cases}x_0+y_0+z_0-2=0\\ \overrightarrow{OO'}=\alpha\vec{n}\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x_0+y_0+z_0-2=0\\ x_0=\alpha\ ;\ y_0=\alpha\ \text{ et }\ z_0=\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\alpha+\alpha-2=0\\ x_0=y_0=z_0=\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=2/3\\ x_0=y_0=z_0=2/3\end{cases}\Rightarrow O'\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$

$\overrightarrow{O'A}\begin{pmatrix}1/3\\1/3\\-2/3\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{O'B}\begin{pmatrix}1/3\\-2/3\\1/3\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{O'C}\begin{pmatrix}-2/3\\1/3\\1/3\end{pmatrix}$ On a $\overrightarrow{O'A}+\overrightarrow{O'B}+\overrightarrow{O'C}=\vec{0}$

donc O' est le centre de gravité de triangle ABC.

4) a) $I=O*A\Leftrightarrow I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$; $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ est normal à Q avec $Q:x+y+d=0$ on a

$I\in Q\Leftrightarrow\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+d=0\Rightarrow d=-1$ d'où $Q:x+y-1=0$. b) $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\vec{n}$ et $\overrightarrow{OA}$ ne sont pas colinéaires donc Δ et Q ne sont pas parallèles et par suite Δ et Q sont sécants. Soit $G=\Delta\cap Q$, On a

$\begin{cases}x_G+y_G-1=0\\ \overrightarrow{OG}=\alpha\vec{n}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_G+y_G-1=0\\ x_G=\alpha\ ;\ y_G=\alpha\ ;\ z_G=\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\frac{1}{2}\\ x_G=y_G=z_G=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow G\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

$\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{OA}=OG.OA.\cos\left(\widehat{OGA}\right)\Leftrightarrow\cos\left(\widehat{OGA}\right)=\frac{\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{OA}}{OG.OA}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{2}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

Exercice N° 30: 1) a) $\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE}$

; $\overrightarrow{FD}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$; $D(0;1;0)\Leftrightarrow(FD)\begin{cases}x=-\alpha\\ y=1+\alpha\ ;\alpha\in IR\\ z=-\alpha\end{cases}$. $\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$

; $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$; $B(1;0;0)\Leftrightarrow(BH)\begin{cases}x=1-\alpha\\ y=\alpha\\ z=\alpha\end{cases}$; $\alpha\in IR$

b) $O=E*C$; $E(0;0;1)$, $C(1;1;0)$; $x_O=\frac{x_E+x_C}{2}=\frac{1}{2}$, $y_O=\frac{y_E+y_C}{2}=\frac{1}{2}$;

$z_O=\frac{z_E+z_C}{2}=\frac{1}{2}\Rightarrow O\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Les solutions

Exercice N° 1 : 1)b 2) a 3)a
Exercice N°2 : 1)a , 2)c , 3)b , 4)b) , 5)*a)*

6) *a)car* $n!+(n+1)!=n!+(n+1)n!=n!(n+2)$ *et ona :* $\frac{(n+2)!}{n+1}=\frac{(n+2)(n+1)n!}{n+1}=(n+2)n!$

Exercice3 :C'est le nombre d'applications de l'ensemble des 30 voyageurs dans l'ensemble des 10 stations ; ce nombre est 10^{30}

Exercice 4 : a) $N_1=C_5^3+C_3^3=11$; b) $N_2=C_2^1\times C_8^2=56$

c) $N_3=C_4^1\times C_2^1\times C_1^1+C_3^2\times C_2^1=8+6=14$; d) $N_4=C_{10}^3-C_6^3=100$

Exercice5 :1)a) $A_{10}^3=720$ .b) $A_4^3+A_6^3=24+120=144$. c) $720-144=576$

d) $\left(A_6^2\times A_4^1\right)\times \underbrace{C_3^1}_{\text{ordre}}=6\times5\times4\times3=360$

2ième méthode : Comme si l'on tire simultanément 3 jetons et on les ordonne donc le nombre est $C_6^2\times C_4^1\times 3!=15\times4\times6=360$

2)a) $10^3=1000$. b) $4^3+6^3=280$. c) $1000-280=720$.

d) $6^2\times4^1\times \underbrace{C_3^1}_{\text{ordre}}=432$

2ième méthode $\frac{6^2\times4^1\times3!}{2!}=432$ (Dans 6^2 : les deux jetons rouges sont ordonnées ; on divise par $(2!)$ pour supprimer l'ordre et on multiple par $3!$ pour ordonner les 3 jetons)

Exercice 6 :1) $N_1=6!=720$.

2) la disposition possibles sont GGGGFF, FFGGGG car $N_2=2\times(4\times2!)=96$

3) la disposition possibles sont GFGFGG, GGFGFG , $N_3=2\times(4\times2!)\times2=96$

4) les dispositions possibles sont FFGGG, GFFGGG, GGFFGG, GGGFGF, GGGGFF
Car $N_4=2\times(4\times2!)\times5=240$

Exercice 7 :Un jury est une partie ayant 5 éléments de l'ensemble des 117 personnes ; le nombre de jurys est $C_{17}^5=6188$

2) $C_{10}^3\times C_7^2=120\times21=2520$. 3) $C_{10}^5=252$.

4) le nombre de jurys comprenant au moins une femme est égal au nombre total de jurys diminué du nombre de jurys ne comprenant aucune femme ; ce nombre est $C_{17}^5-C_{10}^5$ c'est-à-dire 5936

5) $C_{10}^5+C_7^1\times C_{10}^4+C_7^2\times C_{10}^3=252+1470+2520=4252$

Exercice 8 :1) $C_7^4=35$ 2) $C_5^2=10$ 3) $2C_5^3=20$ 4) $C_5^4=5$ 5) $C_7^4-C_5^4=30$

Exercice 9 :1) $(k+1)!=(k+1)\times k!\Rightarrow (k+1)!-k!=(k+1)\times k!-k!=k\times(k+1-1)=k\times k!$

2) On applique l'égalité précédente pour $k\in\{0,1,...,n-1\}$ On obtient $1!-0!=0\times0!$; $2!-1!=1\times1!$ et $3!-2!=2\times2!$ Puisque : $n!-(n+1)!=(n-1)\times(n-1)!$ La somme membre a membre permet d'écrire : $n!-0!=1\times1!+2\times2!+.....+(n-1)\times(n-1)!$ Or $0!=1$, le résultat en découle.

Exercice 10 :a) Un trajet possible revient a placer les machines dans un ordre donné.
Exemple de trajet : $A\to B\to C\to D$ ou $A\to B\to D\to C$

Il suffit donc de permuter les 4 machines et par suite le nombre demandé est $N_a=4!=24$

b) $N_b=3!=6$

c) la machine B ne peut pas être utilisé dans l'étape 3 ou l'étape 4 .par suite la machine B doit être utilise soit dans la première étape (le nombre correspond est 2!)Donc le nombre demandé est $N_c=3!+2!=10$

Exercice11 :1) $5^4=625$ 2) $A_5^4=120$ 3) $C_4^2\times4^2=96$

Exercice 12 : 1) 9×10^4 , 2) 10^3 , 3) $9\times A_9^4=27216$

Exercice13: 1) $3^8=6561$ 2) $C_8^3\times2^5=56\times32=1792$

3) $C_8^3\times C_5^3$ (ce nombre est aussi égale à $C_8^3\times C_5^2$ ou à $C_8^3\times C_6^3$) $=560$

4) Il y a C_3^2 façons de choisir 2 couleurs parmi 3

Il y a 2^8 façons de colorier les 8 carreaux avec 2 couleurs.
Il y a 2 façons où les 8 carreaux sont de même couleur.

Donc le nombre de façons comprenant deux couleurs seulement est $C_3^2(2^8-2)=762$

Exercice 14 :1)a) une diagonale est segment distinct d'un coté joignant deux sommets du polygone.
Ainsi le nombre de diagonale d'un polygone de n cotés est C_n^2-n

b) Il suffit de résoudre dans $\mathbb{N}\setminus\{0,1,2,3\}$ l'équation $C_n^2-n=n$ .Le calcul donne $n=5$ (pentagone)

2)a)Définir une corde c'est choisir deux points parmi les n points. Ainsi le nombre de cordes possibles est

$N=C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$

b) Notons I_n le nombre demandé.

Cas particulier : $n=4$ les quatre points A, B, C et D définissent un quadrilatère convexe ABCD qui admet deux diagonales c'est pour cela $I_4=I$.

Cas générale : le choit de 4 points distincts de ζ assure un seul point d'intersection.

Ainsi le nombre de point d'intersection demandé est C_4^n

Exercice 15 :1)a) $A_{10}^3=720$ .b) $A_4^3+A_6^3=24+120=144$. c) $720-144=576$

d) Comme si l'on tire simultanément 3 jetons et on les ordonne donc le nombre est $C_6^2\times C_4^1\times3!=15\times4\times6=360$

2)a) $10^3=1000$. b) $4^3+6^3=280$. c) $1000-280=720$. d) $\frac{6^2\times4^1\times3!}{2!}=432$ (Dans 6^2 : les deux jetons rouges sont ordonnées ; on divise par $(2!)$ pour supprimer l'ordre et on multiple par $3!$ pour ordonner les 3 jetons)

Exercice 16 : 1) $E_3 = \{A;B;C\}$

1er place	2ème place	3ème place	Les classements (les triplets) possibles
A	B	C	(A;B;C)
A	C	B	(A;C;B)
B	A	C	(B;A;C)
B	C	A	(B;C;A)
C	A	B	(C;A;B)
C	B	A	(C;B;A)

$N_3 = 6$

2) $E_4 = \{A;B;C;D\}$

1er place	2ème place	3ème place	Les classements (les quadruplets) possibles
A	B	C	(D;A;B;C) ; (A;D;B;C) ; (A;B;D;C) ; (A;B;C;D)
A	C	B	(D;A;C;B) ; (A;D;C;B) ; (A;C;D;B) ; (A;C;B;D)
B	A	C	(D;B;A;C) ; (B;D;A;C) ; (B;A;D;C) ; (B;A;C;D)
B	C	A	(D;B;C;A) ; (B;D;C;A) ; (B;C;D;A) ; (B;C;A;D)
C	A	B	(D;C;A;B) ; (C;D;A;B) ; (C;A;D;B) ; (C;A;B;D)
C	B	A	(D;C;B;A) ; (C;D;B;A) ; (C;B;D;A) ; (C;B;A;D)

$N_4 = 6 \times 4 = 24$.

3) On remarque que $N_3 = 3N_2$ et $N_4 = 4N_3$

4) a) $E_{k-1} = \{A_1;A_2;.....;A_{k-1}\}$; $E_k = \{A_1;A_2;.....;A_{k-1};A_k\} = E_{k-1} \cup \{A_k\}$

Si N_{k-1} est le nombre de classement pour le groupe E_{k-1} sans ex æquo de $(k-1)$ élèves et N_k est le nombre de classement pour le groupe E_k sans ex æquo de k élèves alors $N_k = kN_{k-1}$ car pour chaque classement de E_{k-1} il y a k places pour l'élève A_k dans tout classement de E_k.

b) On a : $\begin{cases} \cancel{N_2} = 2 \\ \cancel{N_3} = 3 \times \cancel{N_2} \\ \cdot \quad / \\ \cdot \quad \cdot \\ / \quad \cdot \\ N_k = k \times \cancel{N_{k-1}} \end{cases}$

on multiplie ces k égalités membre à membre et après simplification : on obtient $N_k = 1 \times 2 \times 3 \times ..... \times k = k!$

Exercice 17 : jamel se souvient du premier et dernier chiffre de son code. Il peut être représenté par le tableau

1	c	d	5

1) Il y a 9 choix possibles pour le nombre c et neuf pour le nombre d car c et d sont distincts, soit au total 10 ×9 choix possibles .Il y a 90 codes possibles.

2)La somme des quatre chiffres est égale à 8, soit 1 + c + d + 5= 8.

c+d= 2.

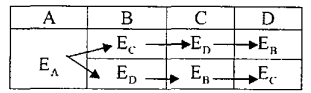
c et d étant distincts et entiers compris entre 0 et 9, il n'y a que deux possibilités

c= 0 et d = 2 ou c = 2 et d = 0.

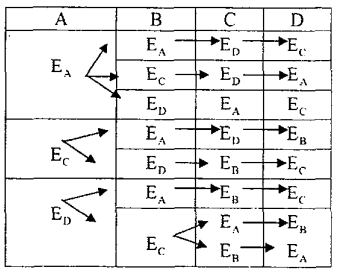
jamel a raison en affirmant qu'en deux tentatives il est sûr de retrouver le bon code.

Exercice N°18 : 1) Tout cas possible correspond à une permutation de l'ensemble des 4 épées et réciproquement. Le numéro des cas possibles est $4! = 24$.

2) a) Le joueur A reçoit son épée, reste alors les épées de B ; C et D qu'on note E_B ; E_C et E_D. Comme chacun des joueurs B ; C et D ne reçoit pas son épée : Pour le joueur B il y a 2 possibilités : E_C ou E_D. Pour chacune de ces deux possibilités, chacun des joueurs C et D n'a qu'une seule possibilité. Le nombre de cas possibles où le joueur A est le seul à retrouver son épée est : $n = 2 \times 1 = 2$ On peut utiliser l'arbre de choix pour voir tous ces cas possibles :



b) Le raisonnement utilisé dans a) est le même si ce joueur est B ou C ou D. Le nombre de cas possibles où un seul joueur retrouve son épée est : $n_1 = 4 \times n = 8$

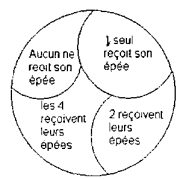


c) **1er méthode** : On peut dresser l'arbre de choix A l'aide de cet arbre de choix (où il y a toutes les possibilités) ; le nombre de cas possibles tel qu'aucun joueur ne retrouve son épée est 9.

2ième méthode : On sait que le nombre total de cas possibles est : $N = 4! = 24$. Ces 24 cas possibles sont répartis en 4 types : on bien aucun joueur ne reçoit son épée, ou un seul joueur reçoit son épée, ou deux joueurs reçoivent leurs épées ou bien les quatre joueurs reçoivent leurs épées.

Désignons par n_0 ; n_1 ; n_2 et n_4 le nombre de cas possibles correspondant respectivement à ces 4 types. On a : $n_1 = 8$; $n_4 = 1$

Cherchons n_2. Il y a C_4^2 choix possibles des 2 joueurs qui retrouvent leurs épées. Pour chaque choix de ces 2 derniers les 2 autres joueurs restants n'ont qu'une seule possibilité, chacun d'eux reçoit l'épée de l'autre ce qui donne $n_2 = C_4^2 . 1 = 6$



Par suite $n_0 = 4! - (n_1 + n_2 + n_4) = 24 - 15 = 9$

Exercice n°19 :

1) On tire simultanément 5 jetons . Tout tirage correspond à une combinaison de 5 jetons parmi les 9 jetons.

a) Le nombre de tirages comprenant exactement 2 jetons blancs est : $n_1 = C_4^2 . C_5^3 = 60$.

b) Le nombre total de tirage est : $N = C_9^5 = 126$.

Le nombre de tirages comprenant au moins deux jetons rouges est alors :

$n_2 = C_9^5 - C_5^1.C_4^4 = 126 - 5 = 121$.

c) 8 s'écrit : $8 = 3 + 5 = 1 + 2 + 5 = 1 + 3 + 4$.

$n_3 = C_2^2.C_4^3 + C_3^3.C_4^2 + C_3^3.C_4^2 = 16$.

2) On tire successivement sans remise tous les jetons du sac. Tout tirage correspond à une permutation des 9 jetons.

a) $n_1 = 8! = 40320$

b) Le nombre de tirage est : $n_2 = 6! = 720$.

c) Il s'agit de permuter les 6 jetons , en considérant M,A,T,H comme un seul jeton, et de permuter les 4 jetons M,A,T,H.

Le nombre de tirages comprenant les 4 jetons blancs consécutivement est alors : $n_3 = 6! \times 4! = 17280$.

d) Un tirage comprenant des lettres et des chiffres alternés est de la forme : (R,B,R,B,R,B,....,R).

Le nombre de tirages comprenant des lettres et des chiffres alternés est : $n_4 = 5!.4! = 2880$.

e) Un cas favorable à cette question est un 9-uplet dont les cinq premiers termes sont 2 jetons blancs et 3 jetons rouges, les quatre derniers termes sont des jetons quelconques parmi ceux qui restent.

Le nombre de tirages répondant à cette question est : $n_5 = C_4^2.C_5^3.5!.4! = 172800$.

Exercice 20 :

- $S = (1-1)^n = 0$
- $S' = \frac{1}{0!n!} - \frac{1}{1!(n-1)!} + \frac{1}{2!(n-2)!} - .... + (-1)^p \frac{1}{p!(n-p)!} + ... + (-1)^n \frac{1}{n!0!}$

$= \frac{1}{n!}\left[\frac{n!}{0!n!} - \frac{n!}{1!(n-1)!} + \frac{n!}{2!(n-2)!} - .... + (-1)^p \frac{n!}{p!(n-p)!} + ... + (-1)^n \frac{n!}{n!0!}\right]$

$= \frac{1}{n!}\left[C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - .... + (-1)^p C_n^p + ... + (-1)^n C_n^n\right] = \frac{1}{n!} \times S = 0$

Exercice 21: 1) $p \times C_n^p = p \times \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{(p-1)!(n-p)!}$

$n \times C_{n-1}^{p-1} = n \times \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} = \frac{n!}{(p-1)!(n-p)!}$ Le résultat en découle.

2) On applique l'égalité précédente pour $p \in \{1, 2..., n\}$

$C_n^1 = n \times C_{n-1}^0$

$2C_n^2 = n \times C_{n-1}^1$

$3C_n^1 = n \times C_{n-1}^2$

. .

. .

$(n-1)C_n^{n-1} = n \times C_{n-1}^{n-2}$

$nC_n^n = n \times C_{n-1}^{n-1}$

La somme membre a membre donne :

$C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + nC_n^n = n\left[C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + ... + C_{n-1}^{n-1}\right]$ or $(1+1)^{n-1} = C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + ... + C_{n-1}^{n-1}$

$\Rightarrow C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + nC_n^n = n2^{n-1}$

Exercice 22: $A = (1+2)^n = 3^n$; $B = (1-1)^n = 0$

Exercice 23 : Utiliser la formule $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$ et on trouve $S = 4^n$

Exercice n°24: On pose :

$S = C_3^0 C_{n-3}^p + C_3^1 C_{n-3}^{p-1} + C_3^2 \; C_{n-3}^{p-2} + C_3^3 C_{n-3}^{p-3} = C_{n-3}^p + 3C_{n-3}^{p-1} + 3C_{n-3}^{p-2} + C_{n-3}^{p-3}$

$S = \left(C_{n-3}^p + C_{n-3}^{p-1}\right) + 2\left(C_{n-3}^{p-1} + C_{n-3}^{p-2}\right) + \left(C_{n-3}^{p-2} + C_{n-3}^{p-3}\right)$

Or on a : : $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p$, on obtient : $S = C_{n-2}^p + 2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2}$

donc $S = \left(C_{n-2}^p + C_{n-2}^{p-1}\right) + \left(C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2}\right) = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1} = C_n^p$.

Exercice 25 :

1) • $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^n = C_n^0 - \frac{1}{x}C_n^1 + \frac{1}{x^2}C_n^2 - \frac{1}{x^3}C_n^3 + ... + \frac{(-1)^p}{x^p}C_n^p + ... + \frac{(-1)^n}{x^n}C_n^n$

- $3^n.C_n^0 - 3^{n-1}.C_n^1 + 3^{n-2}.C_n^2 - .... + (-1)^p.3^{n-p}.C_n^p + ... + (-1)^n.C_n^n$

$= 3^n\left[C_n^0 - \frac{1}{3}C_n^1 + \frac{1}{3^2}C_n^2 - .... + \frac{(-1)^p}{3^p}C_n^p + ... + \frac{(-1)^n}{3^p}C_n^n\right] = 3^n - f(3) = 3^n.\left(1 - \frac{1}{3}\right)^n = 2^n$

2) • $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^n \Rightarrow f'(x) = n\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{n-1}.\frac{1}{x^2}$ et $f'(3) = n\left(1 - \frac{1}{3}\right)^{n-1}.\frac{1}{3^2} = n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.\frac{1}{3^2}$.

- $f(x) = C_n^0 - \frac{1}{x}C_n^1 + \frac{1}{x^2}C_n^2 - \frac{1}{x^3}C_n^3 + ... + \frac{(-1)^p}{x^p}C_n^p + ... + \frac{(-1)^n}{x^n}C_n^n$

donc $f'(x) = \frac{1}{x^2}C_n^1 - \frac{2}{x^3}C_n^2 + \frac{3}{x^4}C_n^3 + ... + \frac{(-1)^{p+1}.p}{x^{p+1}}C_n^p + ... + \frac{(-1)^{n+1}.n}{x^{n+1}}C_n^n$

$f'(3) = \frac{1}{3^2}C_n^1 - \frac{2}{3^3}C_n^2 + \frac{3}{3^4}C_n^3 + ... + \frac{(-1)^{p+1}.p}{3^{n+1}}C_n^p + ... + \frac{(-1)^{n+1}.n}{3^{n+1}}C_n^n$

$= \frac{1}{3^2}\left[C_n^1 - \frac{2}{3}C_n^2 + \frac{3}{3^2}C_n^3 + ... + \frac{(-1)^{p+1}.p}{3^{p-1}}C_n^p + ... + \frac{(-1)^{n+1}.n}{3^{n-1}}C_n^n\right] = \frac{1}{3^2}\sum_{p=1}^{n}\frac{(-1)^{p+1}.pC_n^p}{3^{p-1}}$

En égalisant les deux résultats de $f'(3)$ on obtient :

$\frac{1}{3^2}\sum_{p=1}^{n}\frac{(-1)^{p+1}.pC_n^p}{3^{p-1}} = n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.\frac{1}{3^2}$ d'où $\sum_{p=1}^{n}\frac{(-1)^{p+1}.pC_n^p}{3^{p-1}} = n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

Exercice 26: 1) Le nombre de numéros à 1 chiffre est 9 (de 1 à 9)
Le nombre de numéros à 2 chiffres est 90 (de 10 à 99 : 99-9=10)
Le nombre de numéros à 3 chiffres est 900 (de 100 à 999 : 999-99=900)
Le nombre de chiffres total utilisé pour la pagination est donc $9+2\times90+3\times900=2889$.
2) De 1 à 99 le chiffre 7 est utilisé 20 fois : 1 fois dans le n°7, 1 fois dans chaque n° de 70 à 79 (excepté 77), 1 fois dans les n° 17,27,37,...,97 (excepté 77), 2 fois dans le n°77, ce qui fait un total de 1+9+8+2=20.
Mais de 100 à 199 le chiffre 7 est aussi utilisé 20 fois : en effet si pour tous ces numéros on supprime le chiffre 1 au début et les 0 éventuels au début du nombre qui reste (donc 100 devient ... rien du tout) on ne supprime aucun 7 et il reste, tous (et que) les nombres de 1 à 99.
pour toutes les autres séquences : 200 à 299, ..., 900 à 999, exceptée la séquence de 700 à 799 où 7 est utilisé 100 fois de plus.
Finalement le chiffre 7 est utilisé $10\times20+100=300$ fois.
3) Le nombre d'apparition des chiffres 1,2,3,4,5,6,8,9 est évidemment aussi 300 ; mais pas pour 0, car dans le raisonnement fait au début de la question 2 on supprime des 0!
Donc $9\times300+$ nombre d'apparition du 0 =2889.
Le chiffre 0 est donc utilisé 2889-2700=189 fois.
Remarque 1 : une erreur étant vite arrivée, vérifions ce dernier résultat par un calcul direct.
Dans un numéro à 1 chiffre il y a 0 apparition du chiffre 0
Dans un numéro à 2 chiffres, 0 ne peut apparaître qu'une fois, en 2ième position dans les numéros 10 à 90, donc 9 apparitions du chiffre 0.
Dans un numéro à 3 chiffres, soit 0 apparaît une fois soit en 2ième position, donc 9 possibilités (tous les chiffres sauf 0) pour le 1er chiffre et les mêmes 9 possibilités aussi pour le 3ième chiffre du numéro, d'où $9\times9=81$ apparitions du chiffre 0 pour ce cas.
soit en 3ième position, et encore $9\times9=81$ apparitions du chiffre 0 pour ce cas. soit 0 apparaît deux fois c'est forcément en 2ième et 3ième position, donc il s'agit des numéros 100 à 200, donc $9\times2=18$ apparitions du chiffre 0. D'où le nombre total d'utilisations du chiffre 0 est 0+9+81+81+18=189.
Remarque 2 : une méthode analogue à celle de la remarque 1 permet aussi de comptabiliser directement le nombre d'apparitions du chiffre 7, mais c'est un peu plus délicat.
Dans un numéro à 1 chiffre il y a 1 apparition du chiffre 7 (dans le n°7)
Dans un numéro à 2 chiffres, soit il apparaît une fois au début : 9 apparitions (dans les n°70 à 79, excepté 77) *en 2ième position* : 8 *apparitions (dans les n° 17 à 97, excepté 77) soit il apparaît deux fois* : 2 apparitions (dans le n° 77) Dans un numéro à 3 chiffres, soit 7 apparaît une fois soit au début, donc $9\times9=81$ apparitions (9 possibilités pour les 2ième et 3ième chiffres, puisque 7 est exclu)
soit en 2ième position, donc $8\times9=72$ apparitions (car cette fois que 8 possibilités pour le 1er chiffre, 0 é interdit) soit en 3ième position, et encore $8\times9=72$ apparitions du chiffre 7
soit 7 apparaît deux fois soit en 1ière et 2ième positions, donc $9\times2=18$ apparitions du chiffre 7 (dans les n° 770 à 779, excepté 777) soit en 1ère et 3ième positions, donc encore $9\times2=18$ apparitions (dans les n° 707 à 797, excepté 777) soit en 2ième et 3ième positions, donc $8\times2=16$ apparitions (dans les n° 177 à 977, excepté 777) soit 7 apparaît trois fois : dans 777, donc 3 apparitions
D'où le nombre total d'utilisations du chiffre 7 est 1+9+8+2+81+72+72+18+18+16+3=300.

Exercice 27: L'entier 1 étant sur une carte, il ne peut être accompagné que de 2, donc 3 sera accompagné de 4, etc : chaque carte contient les entiers 2p-1 et 2p, dont la somme est 4p-1, cela pour p=1,2,3,...,100.
Notons E={1;2;3;...;100}
1) La somme des entiers écrits sur les cartes de Maram est $A=4(p_1+p_2+...+p_{21})-21$ où les p_i, distincts 2 à 2, sont dans E, et ainsi A est la somme d'un nombre pair et d'un nombre impair : donc A est impair et ce ne peut être 2004.
2) $A+21=4(p_1+p_2+...+p_{21})$ est divisible par 4, or $2005+21=2026=2\times1013$ qui n'est pas divisible par 4, donc A ne peut être 2005.
3) L'énoncé dit en fait que A=2003 : on vérifie tout de suite que $2003+21=4\times506$ est bien divisible par 4. Et donc $p_1+p_2+...+p_{21}=506$.
De façon analogue la somme des entiers écrits sur les cartes de abrar est $1396=4(p'_1+p'_2+...+p'_{20})-20$, les p'_i, distincts 2 à 2, étant dans E et donc $p'_1+p'_2+...+p'_{20}=354$.
Mais par hypothèse, les 20 cartes choisies par abrar sont distinctes de celles choisies par Maram et donc $\{p_1;p_2;...;p_{21}\}\cap\{p'_1;p'_2;...;p'_{20}\}=\varnothing$.
Donc obligatoirement la somme $p_1+p_2+...+p_{21}+p'_1+p'_2+...+p'_{20}$ doit être supérieure ou égale à la plus petite somme possible de 41 éléments distincts de E, soit $1+2+3+...+41=41\times42/2=861$; or $506+354=860<861$ et donc abrar s'est trompé aussi. Pas de chance!
Exercice 28: On a tout de suite, sous réserve que $0\le l\le m$, $0\le s\le m$, $m\le s+l$:

	loups	moutons	serpents
Effectifs le matin	l	m	s
effectifs le soir	*m-s*	*m-l*	*s+l-m*

Remarque : si on avait l>m, alors le soir, le nombre de moutons ne serait pas m-l (qui est <0), mais 0, le nombre de serpents serait s et le nombre de loups l-s ...si $s\le l$, sinon ce serait 0 : par exemple (10,5,11) le matin donne (0,0,11) le soir, ce qui n'a rien à avec (5-11,5-10,10+11-5)=(-6,-5,16)!
Le problème est de remonter les calculs, puisque on nous donne les effectifs au bout de dix jours. Il faut connaissant les effectifs le soir, en déduire ceux du matin.
Par résolution du systéme d'inconnues l,m,s et d'équations

m-s=k
m-l=k'
s+l-m=k"

on trouve l=k+k", m=k+k'+k", s=k'+k" ; en prenant k, k', k" tous ≥0, on a bien $0\le l\le m$, $0\le s\le m$, $m\le s+l$ et donc on a :

	loups	moutons	serpents
effectifs le matin ou la veille au soir	k+k"	k+k'+k"	k'+k"
effectifs le soir	k	k'	k"

Il suffit alors, en partant du triplet 0,1,0, d'exécuter dix fois de suite l'algorithme qui fait passer du triplet

(k,k',k") au triplet (k+k",k+k'+k",k'+k") ; avec un tableur c'est immédiat, mais c'est faisable à la main assez rapidement (avec risque d'erreur).
On obtient :

	loups	mountons	serpents
effectifs le soir du 10 ième jour	0	1	0
effectifs le soir du 9 ième jour	0	1	1
effectifs le soir du 8 ième jour	1	2	2
effectifs le soir du 7 ième jour	3	5	4
effectifs le soir du 6 ième jour	7	12	9
effectifs le soir du 5 ième jour	16	28	21
effectifs le soir du 4 ième jour	37	65	49
effectifs le soir du 3 ième jour	86	151	114
effectifs le soir du 2 ième jour	200	351	265
effectifs le soir du 1 ier jour	465	816	616
et enfin, les effectifs au départ sont	1081	1897	1432

Exercice29 : Que remarquer? A chaque fois 20 bâtonnets sont utilisés : on peut alors se dire, puisqu'il y a cinq chiffres à coder, c'est que pour coder un chiffre on utilise cinq bâtonnets.
Ce n'est pas aussi simple que cela : il y a des "paquets" de 1 ou 2 ou 3 ou 4 ou 5 ou 6 de bâtonnets. Pourquoi ca monte jusqu'a 6?
Et puis il y a entre ces "paquets" des espaces qui sont inégaux : soit un espace correspond à l'emplacement possible d'un bâtonnet, soit à l'emplacement possible de deux bâtonnets. La taille de ces espaces est-elle vraiment à prendre en compte, ou est-ce une fantaisie sans importance au moment de la frappe?
Bref, pour moi ca été la bouteille à l'encre!
En fait ces espaces entre groupes de bâtonnets sont presque la clé du problème!
En effet, numérotons de 1 à 30, et à partir de la droite, les positions susceptibles d'être prises par les bâtonnets, les espaces étant pris en compte aussi ; pour le codage de 75006 et 13007, ca monte effectivement jusqu'à 30.
On s'apercoit alors que les positions 1,7.13,19,25 sont toujours occupées par un bâtonnet! (vous me direz et aussi la 15ième!! : là l'énoncé aurait pu l'éviter, en choisissant un code postal où la position 15 n'est pas occupée par un bâtonnet).
J'appelerai ces cinq positions des séparateurs, et après coloriage en rouge de ces séparateurs le tableau de l'énoncé devient :

Code postal	Codage en bâtonnets
51100	
52130	
08400	
75006	
13007	
?	

Bien sûr entre deux séparateurs consécutifs on peut mettre cinq bâtonnets, de même qu'à gauche du dernier séparateur (celui en position 25).
Et là si on observe bien, il y a beaucoup de cas où immédiatement après (cad à gauche) du séparateur il y a trois bâtonnets accolés : et, en ne considèrent que le codage des cinq codes postaux donnés, on compte 8 de ces cas, alors qu'il y a aussi 8 zéros qui apparaissent dans ces cinq codes postaux.
C'est la clé : le chiffre 0 doit être codé par trois bâtonnets juste après un séparateur, et en outre, l'ordre de codage des chiffres du code postal est inversé, puisque par exemple pour 51100 et 08400, qui finissent par deux zéros, la série de bâtonnets commence par deux de ces cas! Ce double aspect se vérifie pour tous les autres 0.
On observe aussi qu'entre deux séparateurs consécutifs il y a toujours trois bâtonnets (et seulement trois) alors qu'il y a 5 positions possibles (idem pour à gauche du dernier séparateur, celui en position 25) ; or combien y a-t-il de façons de placer trois bâtonnets parmi cinq emplacements possibles?
Ca revient à choisir deux emplacements où on ne les mettra pas : 5 choix pour le 1er, 4 pour le 2ième et on divise par deux, puisque peu importe l'ordre. Il y a donc $5\times4/2=10$ possibilités, qui est justement le nombre

de chiffres à coder!

Un chiffre du code postal doit donc donc être codé par une disposition particulière de trois bâtonnets parmi les cinq positions possibles entre deux séparateurs consécutifs. On l'a déjà vérifié pour le chiffre 0 ; on le vérifie aussi pour le chiffre 5 qui apparaît trois fois dans les codes postaux : à chaque fois on trouve |:|:| (le deux-points signifie que c'est une position non occupée par un bâtonnet), et le fait que l'ordre de codage des chiffres du code postal soit inversé se confirme : les deux 5 de 51100 et 52130 sont bien codés par |:|:| que l'on trouve non pas au début de la série de bâtonnets mais à la fin, entre le 1er et 2ième séparateur.

Par observation du tableau (pour les 5 codes connus), on peut alors lire le codage des chiffres 0,1,2,3,4,5,6,7,8 et on déduira le codage du chiffre 9 (qui n'apparaît pas dans le tableau de l'énoncé) :

chiffre	codage avec 3 bâtonnets sur 5 positions (les deux deux-points symbolisent les positions non prises par les bâtonnets)
0	:|||
1	:|:||
2	:||:|
3	:|||:
4	|::||
5	|:|:|

6	|:||:
7	||::|
8	||:|:
9	|||:: (cette disposition est la seule qui n'apparaît pas parmi les neuf ci-dessus et donc c'est elle qui code le chiffre 9)

Et maintenant, il n'y a plus qu'à appliquer la recette ci-dessus pour déchiffrer la dernière série de bâtonnets de l'énoncé : il représente le code postal 94310

Exercice N° 30: 1) Le coefficient de x^p dans le développement $(1+x)^n$ est C_n^p

Le coefficient de x^p dans le développement $(1+x)^m$ est C_m^p

Le coefficient de x^p dans le développement $(1+x)^{n+m}$ est d'une part C_{n+m}^p et d'autre part

$C_n^0C_m^p + C_n^1C_m^{p-1} + ... + C_n^{p-1}C_m^1 + C_n^pC_m^0$

2) En identifiant les deux polynômes $(1+x)^n$ $(1+x)^m$ et $(1+x)^{n+m}$, on aura

$C_{n+m}^p = C_n^0C_m^p + C_n^1C_m^{p-1} + ... + C_n^{p-1}C_m^1 + C_n^pC_m^0$

3) Faisant $n = m = p$ dans l'égalité précédente, on aura : $C_{2n}^n = C_n^0C_n^n + C_n^1C_n^{n-1} + ... + C_n^{n-1}C_n^1 + C_n^nC_n^0$

Or ; $C_n^1 = C_n^{n-1}$ donc $C_{2n}^n = \left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + ... + \left(C_n^{n-1}\right)^2 + \left(C_n^n\right)^2$

Exercice N° 31: Il est clair qu'à chaque étape on ne peut obtenir qu'un des 3 numéros différents du précédent (celui qui était sur la face contre la table) et que le "1" de départ n'est pas le résultat d'une étape (cela a été source de beaucoup d'erreurs).

Smin=1+2(1ère étape)+1(2ième étape)+2+1+.....+1(2000ième étape)+2(2001ième étape)

(une étape impaire donne 1, une étape paire donne 2)

Smin est la somme de 2002 nombres répartis en 1001 "paquets " de 1+2 et donc Smin=3×1001=3003.

Smax=1+4+3+4+3+.....+3+4

(une étape impaire donne 4, une étape paire donne 3)

cette fois, si on remplace le premier 1 par 3 on a 1001 "paquets" de 3+4 et Smax=7×1001-2=7005.

Montrons que toute valeur entière entre 3003 et 7005 peut être obtenue :
on part de Smin=3003 et on remplace le premier 2 par 3 on obtient 3004, puis on remplace le deuxième 2 par 3 on obtient 3005, et progressivement on remplace tous les 2 par 3 et ainsi on va obtenir tous les entiers de 3004 à 1+3+1+3+....+1+3=(1+3)× 1001=4004.
Ensuite on remplace le premier 3 par 4 et on obtient 4005 : en remplacant tous les 3 par 4 on va obtenir tous les entiers de 4005 à 1+4+1+.....+1+4=(1+4) ×1001=5005.
Puis on remplace successivement tous les 1 par 2 (à partir du deuxième 1) et on va obtenir tous les entiers de 5006 à 1+4+2+4+.....+2+4=(2+4) ×1001-1=6005.
Enfin on remplace successivement tous les 2 par 3 et on obtient tous les entiers de 5007 à Smax.
Exercice 32 :1) Oui : 1 essai transformé, 1 essai non transformé et 5 coups de pied de pénalité (ou drops), soit 7+5+5×3=27.
2) 4 essais : 20 points; reste à obtenir 36-20 points soit 16 points.
Il s'agit de trouver k, le nombre de transformations :0≤ k ≤4 puisqu'il y a eu 4 essais.
On doit avoir 16-2k multiple de 3 puisque les pénalités valent 3 points.
On trouve par essais successifs : k =2.Il y a donc eu 2 essais transformés et 2 essais non transformés ainsi que 4pénalités.
3)On peut essayer tous les cas : soit k le nombre d'essais et k' le nombre de transformations réussies.
D'abord 0≤k' ≤k puis 0≤k≤ 6 puisqu'il y a eu 30 points marqués.
Le nombre de points marqués par des essais transformés ou non est 5k + 2k' et ce résultat sera complété par des points dus aux r pénalités (ou drops) donc par un multiple de 3 inférieur à 30.
Dans le tableau suivant, en colonne, le nombre d'essais et en ligne le nombre de transformations réussies.

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	5	10	15	20	25	30
1		7	12	17	22	27	X
2			14	19	24	29	X
3				21	26	X	
4					28	X	X

Il y a 6 possibilités pour un résultat de 30 points.
15 : avec par exemple 3 essais (non transformés) et 5 pénalités;
30 : avec 6 essais;
12 : avec 2 essais dont 1 transformé er 6 pénalités;
27 : avec 5 essais dont 1 transformé et 1 pénalité;
24 : avec 4 essais dont 2 transformés et 2 pénalités;
21: avec 3 essais (tous transformés!!) et 3 pénalités.
4) Les résultats 6, 7 et 8 peuvent etre atteints, donc les scores 6 + 3k; 7 +3k et 8 + 3k peuvent etre atteints. Or, tout entier n > 8 peut s'écrire par division Euclidienne
n = 3k+0 avec k≥2 soit n=3(k-2)+6 (6 points et k-2 pénalités)
n=3k+1 avec k≥2 soit n=3(k-2)+7 (7 points et k-2 pénalités)
n= 3k + 2 avec k≥2 soit n=3(k-2)+8 (8 points et k-2 pénalités)
Pour n≤8, les résultats 0, 3, 5 et 6 peuvent être atteints. Tous les résultats sont atteints sauf 1, 2 et 4
Exercice N° 33:1)Une flèche entre deux répartitions indiquant que l'on passe de l'une à l'autre par une manipulation :

(7)→(6)(1)→ (5)(2)→ (4)(2)(1) : **après 3 manipulations, (7) donne (4)(2)(1)**
(4)(2)(1)→(3)(3)(1)→ (3)(2)(2)→(3)(2)(1)(1)→(4)(2)(1) **Donc après 4 manipulations, (4)(2)(1) redonne (4)(2)(1)** et donc **après 7 manipulations, (7) donne (4)(2)(1)** En fait k étant un entier naturel, après 3+k×4 manipulations, (7) donne (4)(2)(1) En particulier pour k=501, on obtient : **après 2007 manipulations, (7) donne (4)(2)(1)**
2) Au cours de la question précédente on a "rencontré" 7 répartitions. Vu qu'il n'y a que 7 objets à répartir, il ne peut y avoir un "tas" de répartitions : en fait il est presque immédiat (sans chercher à utiliser des formules de voir qu'il y a en tout 15 répartitions possibles, et en 5 minutes on peut remplir le tableau ci-dessous qui va donner les réponses aux questions 2) et 3) :

Répartition initiale	à l'issue de la 1ère manipulation on obtient	à l'issue de la 2ère manipulation on obtient	à l'issue de la 3ère manipulation on obtient	à l'issue de la 4ère manipulation on obtient	à l'issue de la 5ère manipulation on obtient	nombre minimum de manipulations pour arriver à (4)(2)(1)
(7)	(6)(1)	(5)(2)	(4)(2)(1)	-	-	3
(6)(1)	(5)(2)	(4)(2)(1)	-	-	-	2
(5)(2)	(4)(2)(1)	-	-	-	-	1
(5)(1)(1)	(4)(3)	(3)(2)(2)	(3)(2)(1)(1)	(4)(2)(1)	-	4
(4)(3)	(3)(2)(2)	(3)(2)(1)(1)	(4)(2)(1)	-	-	3
(4)(2)(1)	(3)(3)(1)	(3)(2)(2)	(3)(2)(1)(1)	(4)(2)(1)	-	4
(4)(1)(1)(1)	(4)(3)	(3)(2)(2)	(3)(2)(1)(1)	(4)(2)(1)	-	4
(3)(3)(1)	(3)(2)(2)	(3)(2)(1)(1)	(4)(2)(1)	-	-	3
(3)(2)(2)	(3)(2)(1)(1)	(4)(2)(1)	-	-	-	2
(3)(2)(1)(1)	(4)(2)(1)	-	-	-	-	1
(3)(1)(1)(1)(1)	(5)(2)	(4)(2)(1)	-	-	-	2
(2)(2)(2)(1)	(4)(1)(1)(1)	(4)(3)	(3)(2)(2)	(3)(2)(1)(1)	(4)(2)(1)	5
(2)(2)(1)(1)(1)	(5)(1)(1)	(4)(3)	(3)(2)(2)	(3)(2)(1)(1)	(4)(2)(1)	5
(2)(1)(1)(1)(1)(1)	(6)(1)	(5)(2)	(4)(2)(1)	-	-	3
(1)(1)(1)(1)(1)(1)(1)	(7)	(6)(1)	(5)(2)	(4)(2)(1)	-	4

Remarque : ce tableau pourrait être remplacé par un graphe.
Donc, après au plus 5 manipulations, toutes les répartitions arrivent à (4)(2)(1).
Répartissons ces 15 répartitions selon la valeur du nombre minimum (≥1) de manipulations pour atteindre (4)(2)(1) : les 2 répartitions qui après 1 manipulation arrivent à (4)(2)(1) :
elles vont arriver au bout de 2007 coups à (3)(2)(2) car au bout de 1+2000 manipulations on arrive à (4)(2)(1) et il reste 2 manipulations à faire les 3 répartitions qui après 2 manipulation arrivent à (4)(2)(1) :
elles vont arriver au bout de 2007 coups à (3)(3)(1) car au bout de 2+2004 manipulations on arrive à (4)(2)(1) et il reste 1 manipulations à faire les 4 répartitions qui après 3 manipulation arrivent à (4)(2)(1) :

elles vont arriver au bout de 2007 coups à (4)(2)(1) car au bout de 3+2004 manipulations on arrive à (4)(2)(1) et il reste 0 manipulation à faire les 4 répartitions qui après 4 manipulation arrivent à (4)(2)(1) : elles vont arriver au bout de 2007 coups à (3)(2)(1)(1) car au bout de 4+2000 manipulations on arrive à (4)(2)(1) et il reste 3 manipulations à faire les 2 répartitions qui après 5 manipulation arrivent à (4)(2)(1) : elles vont arriver au bout de 2007 coups à (3)(2)(2) car au bout de 5+2000 manipulations on arrive à (4)(2)(1) et il reste 2 manipulations à faire Donc les seules répartitions qui donnent (4)(2)(1) au bout de 2007 manipulations, sont les 4 qui arrivent à (4)(2)(1) en 3 manipulations, soient : (7) ; (4)(3) ; (3)(3)(1) ; (2)(1)(1)(1)(1)(1)

3) De la répartition ci-dessus, on déduit toute de suite, que la seule répartition finale (au bout de 2007 manipulations) qui soit obtenue pour exactement trois répartitions initiales est (3)(3)(1) : c'est celle vue par Virginie.

Exercice N° 34: Voici un tableau récapitulatif de certaines hypothèses et ....inconnues!

La 2ième ligne donne le nombre de voyageurs montés à la station, la 3ième ceux descendus, la 4ième le total de voyageurs au départ de la station :

stations à l'aller, puis au retour	A	B	C	D	C	B
Montés	?	6	5	t	u	v
Descendus	?	3	9	22	u'	v'
effectif au départ	x	x+3	x-1	x+t-23	x+t-23+u-u'	x+t-21

Pour commencer, expliquons le 22 et le x+t-21 et le fait que x≤24 ; ne pas hésiter, si vous n'êtes pas convaincu, à m'écrire ; cependant le faire avec "délicatesse" car j'ai transpiré pour trouver cette solution!!E1) puisqu'un seul voyageur n'est ni monté en A, ni descendu en D c'est que parmi les 11 montés en B ou C, 10 sont descendus en D, "le 11ième" étant celui non monté en A et pas descendu en D ; très probablement ce 11ième est monté en B et descendu en C.

E2) mais puisque 12 ont fait tout le trajet aller, c'est que parmi ceux montés en A, 12 sont descendus en D (ils ne vont pas continuer après...pour s'arrêter en B ou C alors qu'ils viennent d'y passer!) et donc le total de ceux descendus en D est 10(voir E1)+12=22.

E3) les x voyageurs au départ de A se répartissent en 3 catégories disjointes (puisqu'ils ne vont pas "s'amuser" à aller après D) :

ceux descendus en B, au nombre de 3 (ceux descendus en B ne peuvent que venir de A)

ceux descendus en C : leur nombre est inférieur ou égal à 9

ceux descendus en D : leur nombre est 12 (voir E2)

et donc x≤24

E4) u,u',v,v' ne sont pas connus mais u+v=9, u'+v'=7 et ainsi u-u'+v-v'=2 et donc l'effectif au départ de B est x+t-23+u-u'+v-v'=x+t-21

On va maintenant exploiter les 4 nombres 4,10,16 relatifs au trajet retour : ils vont permettre de montrer que x+t-23=21 et u-u'=7.

E5) les voyageurs du trajet retour se répartissent en 6 catégories disjointes :

ceux qui ne font que D-C : leur nombre est u' (étaient en D et decendent à C)

ceux qui ne font que C-B : leur nombre est p (montent à C et descendent à B)

ceux qui ne font que B-A : leur nombre est v (montent à B et descendent à A, sinon ils reviennent en B!)

donc u'+p+v=4 , relation notée R1

ceux qui ne font que D-C-B : leur nombre est q (étaient en D et descendent en B)

ceux qui ne font que C-B-A : leur nombre est r (montent en C et descendent en A)

donc q+r=10, relation notée R2

ceux qui font D-C-B-A : leur nombre est 16

En considérant les effectifs au départ des stations de retour, on obtient 3 autres relations :

au départ de D : x+t-23=u'+q+16, nombre que je noterai K

au départ de C : x+t-23+u-u'=p+q+r+16 soit p+q+r+16=K+u-u'

au départ de B : x+t-21=v+r+16 soit v+r+16=K+2

On ajoute (quelle cuisine, je sais...) les effectifs au départ de D et B : u'+q+v+r+32=2K+2 soit (voir R2) u'+v+42=2K+2, et (voir R1) on a 4-p+42=2K+2 soit p=44-2K, relation notée R3 .

En reportant v=9-u (hypothèse) dans u'+v+42=2K+2 (voir ligne précédente) on obtient u-u'=49-2K, relation notée R4 .

Enfin, l'égalité p+q+r+16=K+u-u' (voir effectif au départ de C) donne, compte tenu de R2, p+26=K+u-u' et, compte tenu de R3, on obtient 44-2K+26=K+u-u' soit u-u'=70-3K et (voir R4) on a donc 49-2K=70-3K : soit K=21 et u-u'=7 (d'après R4).

Les effectifs au départ des stations du trajet retour sont donc

pour D : x+t-23=K=21, pour C : x+t-23+u-u'=21+7=28 et pour B : x+t-21=K+2=23.

Finalement :

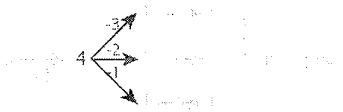
stations à l'aller, puis au retour	A	B	C	D	C	B
effectif au départ	x	x+3	x-1	21	28	23

Comme on a vu plus haut que x≤24, il faut au minimum 28 places pour qu'aucun voyageur ne reste debout.

Exercice35

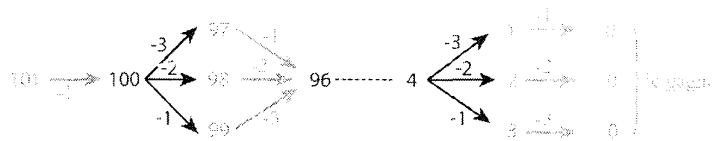
1.

2. La stratégie gagnante

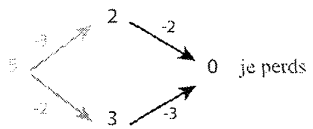


Partie B

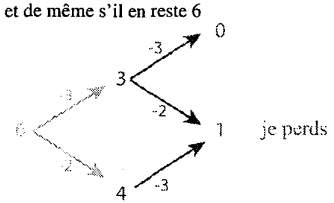
1. Si $n = 101$:



2. Je suis sûr de gagner si mon adversaire est en face de quatre bâtonnets. En effet, quand il aura joué, il me restera 1, 2 ou 3 bâtonnets que je retirerai pour gagner.
De même s'il est en face de 4k bâtonnets avec k ∈ IN.
Je peux toujours l'amener dans cette situation si je suis en face de 4k +i bâtonnets avec $1 \leq i \leq 3$. Il y a donc une stratégie gagnante sauf si n est multiple de 4. Ce qui est le cas pour n= 101, comme vu plus haut.
Partie C : Je perds s'il reste un bâtonnet.
Je gagne s'il en reste 2 ou 3 que je retire.
Je gagne encore s'il en reste 4, car en en retirant 3, il n'en restera que 1.
Par contre, s'il en reste 5



et de même s'il en reste 6



Ainsi sont perdants les multiple de 5 et les multiple de 5 plus 1 et gagnants les multiples de 5 plus 2, 3 ou 4.
Exercice 36:Les informations permettent de remplir un tableau de contraintes

	1	2	3	4	5	6
A			X	X	X	X
B		X	X	X	X	X
C	X	X	X			
D	X	X	X			X
E					X	X
F				X	X	X

Nécessairement :1B 2A 3F 4E 5D 6C.

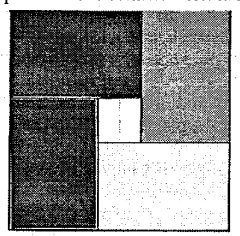
Partie 2 :

De la même façon, on complète le tableau :

	1	2	3	4	5	6
A			X	X	X	X
B		X	X	X		
C						
D						X
E					X	X
F						

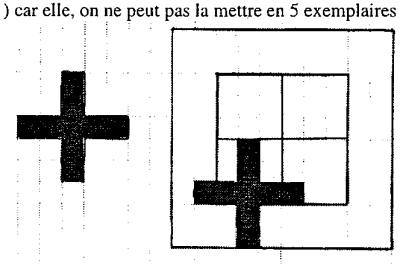
L'information « F précède C de 3 places » ne peut etre exploitée qu'en distinguant trois cas
1er cas : C est 4ème• On aboutit au classement FAECDB
2ème cas : C est 5ème• Cela laisse inconnus les classements de D et E. Deux possibilités : AFDECB ou AFEDCB.
3ème cas : C est 6ème• Le classement de A est 1er ou 2ème
- Si A est 1, cela laisse inconnus les classements de D et E qui se partagent la 2ème et la 4ème place : deux possibilités, AEFDBC ou ADFEBC.
- Si A est 2ème, alors B est nécessairement 1er ou 5ème
• Si B est on aboutit au classement BAFEDC.
• Si B est 5ème, cela laisse inconnus les classements de D et E, qui se partagent la et la 4ème place : deux possibilité, EAFDBC ou DAFEBC .Il y a donc 8 classements possibles FAECDB , AFDECB , AFEDCB , AEFDBC , ADFEBC , BAFEDC, EAFDBC , DAFEBC.
Exercice 37:1. On obtient les configurations suivantes
Nuit 1:-G-V-G-V-V-
Nuit 2:-G-G-G-V-V-
Nuit 3:-V-G-V-V-V-
Nuit 4:-V-G-V-G-G-
Nuit 5:-G-G-G-V-V-
Les dispositions des nuits 2 et 5 étant identiques, on retrouvera la meme disposition aux nuits n et n + 3 à partir de n =2. La disposition lors de la nuit 10 est donc la meme que lors de la nuit 4, c'est-à-dire : -V-G-V-G-G-.
2. On obtient les configurations suivantes
Nuit 1:-V-V-V-V-G-V-V-V-V-...
Nuit2:...-G-G-G-V-G-V-G-G-G-...
Nuit3:...-G-G-V-G-G-G-V-G-G-...
Nuit4:...-G-V-G-V-G-V-G-V-G-...
Nuit4:...-G-V-G-V-G-V-G-V-G-...
Nuit5:...-V-G-G-G-G-G-G-G-V-...
Après la nuit 2, tous les sommets sont occupés, sauf dans une région centrée sur le sommet occupé initialement, à partir duquel une perturbation s'élargit de nuit en nuit. Les deux bornes de cette perturbation ne se rejoindront qu'aux alentours de la 1QQQème nuit, donc longtemps après le délai envisagé dans la question. Les nuits de rang impair (sauf la première), tous les sommets sont occupés sauf deux d'entre eux;

il y aura donc 2008 gardes pour la nuit 99. En revanche, si n est pair, le nombre de gardes de la nuit n est égal à n. Il y aura donc 2010- 8= 2002 gardes lors de la nuit 8.
3. En raisonnant de façon rétrograde, on obtient les configurations suivantes
-V-V-G-G-G-G-V-V-
-V-G-G-V-V-G-G-V-
Dans les deux cas, il y a quatre gardes.
4. Toute position initiale est suivie d'une configuration où les gardes sont en nombre impair.
5. Le cycle est celui-ci
-V-G-V-G-G-G-V-V-G- (5gardes)
-G-G-G-V-G-V-V-V-G- (5gardes)
-G-G-V-G-G-V-G-V-V- (5gardes)
-V-V-G-V-V-G-G-V-V- (3gardes)
-G-V-G-V-V-V-V-G- (3gardes)
-V-G-G-V-G-G-G-V-V- (5gardes)
-V-V-V-G-V-G-V-V-G- (3gardes)
Ces sept configurations se succèdent et le 8ème sommet est toujours vacant. La disposition de la première nuit est l'une d'entre elles. Il y avait donc 3 ou 5 gardes lors de la première nuit.
Exercice N° 38: 1) La pièce proposée loge dans un carré 5*5 : donc il suffit de diviser le damier en 4 carrés 5*5 et de mettre dans chacun de ces carrés un exemplaire de la pièce
2) Toute pièce étant constituée que de 9 carreaux elle loge dans un 4 types de rectangle suivant : 9*1 ou 8*2 ou 7*3 ou 6*4 ou 5*5 (voir justification plus bas) ; or il est facile de vérifier que pour chaque type de rectangle on peut en mettre (au moins) 4 dans le damier et donc en fait quelque soit la forme de la pièce on peut mettre jusqu'à 4 exemplaires de la pièce dans le damier. Voici la figure pour le cas des rectangles 6*4 :



Justifions que toute pièce peut être effectivement mise dans un rectangle 9*1 ou 8*2 ou 7*3 ou 6*4, c'est-à-dire dans une rectangle m*n avec m+n=10 :
Une pièce faite avec 2 carrés (et respectant bien sûr les consignes données) loge évidemment dans un rectangle 2*1 ; si on ajoute un carré, une seule dimension de ce carré sera modifiée (elle sera augmentée de 1), et donc une pièce de 3 carrés loge dans un rectangle 2*2 ou 3*1. De même si on ajoute encore un carré, la pièce de 4 carrés va loger dans un rectangle 3*2 ou 4*1 ; en poursuivant le procédé une pièce de 5 carrés loge dans 4*2 ou 3*3 ou 5*1, une pièce de 6 carrés loge dans 5*2 ou 4*3 ou 6*1, une pièce de 7 carrés loge dans 6*2 ou 5*3 ou 4*4 ou 7*1, etc (+ que 2 étapes à faire !).

Bien sûr il y a un peu mieux en faisant une récurrence, notion qui n'est pas au programme de 1S, mais à titre d'activité préparatoire à la TS montrons par récurrence la propriété : pour tout entier k>=2 une pièce loge dans un rectangle m*n avec m+m=k+1
a) c'est vrai pour k=2 puisqu'une pièce de 2 carrés loge dans un rectangle 2*1
b) montrons que si une pièce de k carrés loge dans un rectangle m*n avec m+n=k+1, c'est encore vrai pour une pièce de k+1 carrés ; en effet cette pièce va loger dans un rectangle m'*n' avec m'=m+1 et n'=n ou m'=m et n'=n+1 et dans les 2 cas m'+n'=m+m+1=(k+1)+1.
en appliquant b) au a) obtient que la propriété est vraie pour k=3, donc en réappliquant le b) au cas k=3 on obtient que la propriété est vraie pour k=4 ....etc (c'est le principe de récurrence) : elle est vraie pour tout entier k>=2 ; en particulier pour k=9, cad toute pièce de 9 carrés loge dans un rectangle m*n avec m+m=9+1=10.
3) Là ca devient moins évident! Contrairement à ce que je pensais d'ailleurs au départ, la pièce proposée à la question 1 peut être mise au moins en 5 exemplaires sur le damier. J'ai alors essayé de voir si toutes les pièces possibles pouvaient être mises en 5 exemplaires, mais ca faisait beaucoup de cas à envisager! En fait il fallait penser à la pièce ayant la forme d'une croix (un carreau central, 2 sur la gauche , 2 sur la droite, 2 vers le haut et 2 vers le bas) car elle, on ne peut pas la mettre en 5 exemplaires sur le damier :



En effet le petit carré central d'une telle croix ne peut qu'être dans le carré 6*6 central du damier (en rouge dans la figure ci-dessus), donc dans un des 4 sous-carrés 3*3 (en vert) de ce carré 6*6. On peut remarquer qu' une croix dont le petit carré central est dans un sous-carré 3*3 occupe 5 petits carrés de ce sous-carré (voir figure ci-dessus et mentalement on voit que c'est vrai pour les 8 autres cas) ; et donc si l'on pouvait mettre 5 telles croix (sans aucun chevauchement bien sûr) sur le damier forcément 2 de ces croix auraient leur petit carré central dans un des sous-carrés 3*3 et en occuperaient 10 petits carrés ce qui est bien sûr impossible. Cette croix ne peut donc être mise en 5 exemplaires sur le damier et donc c'est au plus 4 exemplaires de n'importe quelle pièce faite de 9 petits carrés que l'on peut mettre sur le damier.
***Exercice* 39** : 362 265 618

Exercice N°1 : La mode est la valeur qui a un effectif maximum donc la mode est 5
La série est ordonnée par ordre croissant.

1ère	2ème	3ème	4ème	5ème	6ème	7ème	8ème	9ème	10ème	11ème	12ème	13ème	14ème	15ème
5	5	5	5	6	6	7	8	8	10	12	15	16	16	18

Puis que l'effectif total est un impair (15) la médiane M_e est donc la 8ème $\left(\frac{15+1}{2}=8\right)$ *donc* $M_e=8$

* les valeurs de la première moitié de la série sont

1ère	2ème	3ème	4ème	5ème	6ème	7ème	8ème
5	5	5	5	6	6	7	8

La médiane q_1 de ces (8 pairs) Est la moyenne entre la 4ème et la 5ème valeurs et par suite $q_1=\frac{5+6}{2}=5,5$ *les valeurs de la seconde note de la série sont :

8ème	9ème	10ème	11ème	12ème	13ème	14ème	15ème	rang par rapport à toutes les valeurs
9	9	10	12	15	16	16	18	
1ère	2ème	3ème	4ème	5ème	6ème	7ème	8ème	rang par rapport à la seconde note des valeurs.

La médiane q_3 de ces 8 valeurs (8 est pair) est la moyenne entre la 4ème et 5ème note de la seconde moitié (11ème et 12ème par rapport a toutes les valeurs) Par suite $q_3=\frac{12+15}{2}=13,5$

2) la moyenne $\bar{x}=\frac{142}{15}$ la calculatrice affiche 9,466667donc la moyenne arrondie au centième est $\bar{x}=9,47$,La variance $V=\frac{1654}{15}-(\bar{x})^2=12069,121$, L'écart type $6=\sqrt{v}=\sqrt{12069,121}$

Exercice N°2 : L'écriture les 18 notes dans l'ordre croissant
1)4,4,5,8,9,9,9, 9,9,11,12,15,16,16,18,18,,19,

2)L'effectif total est pair (18 notes) $N=18$; $\frac{N}{2}=9$ Donc la médiane M_e correspond à la moyenne de la 9ème et 10ème valeurs de la série ordonnée donc $M_e=\frac{9+11}{2}=10$

3)La médiane de la première moitié de la population correspond au 1ère quartile donc les notes de la première moitié des élèves sont.
4)

1ère	2ème	3ème	4ème	5ème	6ème	7ème	8ème	9ème
4	4	5	8	9	9	9	9	9

L'effectif de la première moitié est impaire (9 notes)on a la médiane q_1 de ces 9 notes est la 5ème ($\frac{9+1}{2}=5$) c'est-à-dire $q_1=9$

* les notes de la seconde moitié des élèves sont

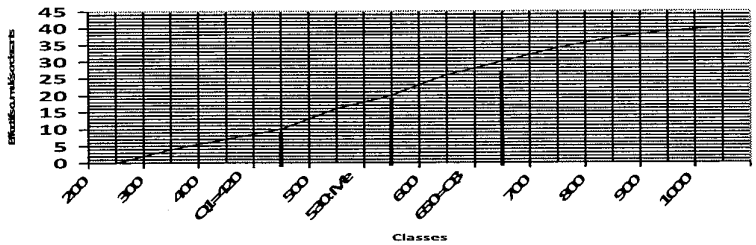
10ème	11ème	12ème	13ème	14ème	15ème	16ème	17ème	18ème	rang par rapport à toutes les valeurs
11	12	15	16	16	18	18	18	19	
1ère	2ème	3ème	4ème	5ème	6ème	7ème	8ème	9ème	rang par rapport à la seconde note des valeurs

L'effectif de la seconde moitié des élèves est impair (9 notes) Par suite le deuxième quartile q_3 et la 5ème notes $\left(\frac{9+1}{2}=5\right)$ de la seconde moitié $q_3=16$ L'écart inter quartile est 16-9=7

4)La population sur la quelle porte l'étude est une classe d'élèves les individus sont les élèves de cette classe.Le caractère étudié sur chaque élève est sa note en mathématique
Il s'agit d'un caractère mesurable de valeurs finies donc c'est caractère quantitatif discret…

Exercice N°3 : 2) a)

Classes en Km	Effectifs	Effectifs cumulés croissants
[200;300[	4	4
[300;400[	5	9
[400;500[	7	16
[500;600[	10	26
[600;700[	8	34
[700;800[	3	37
[800;900[	2	39
[900;1000[	1	40



3) a) D'après le polygone des effectifs cumulés croissants : $Q_1 = 420; Me = 530; Q_3 = 650$.

b) L'entreprise a intérêt a remplacer :

- Les véhicules qui ont roulé moins de 420 Km par des véhicules plus légères.
- Les véhicules qui ont roulé plus de 650 Km par des véhicules diesel.

4) Le kilométrage moyen de l'ensemble des véhicules pendant une semaine est :

$$\overline{X} = \frac{250\times4+350\times5+450\times7+550\times10+650\times8+750\times3+850\times2+950}{40} = 537.5\,\text{Km}$$

5) $$\text{Var}(X) = \frac{4\times(250-537.5)^2+5\times(350-537.5)^2+7\times(450-537.5)^2+10\times(550-537.5)^2}{40}$$

$$+\frac{8\times(650-537.5)^2+3\times(750-537.5)^2+2\times(850-537.5)^2+(950-537.5)^2}{40} = 29093.75$$

$$\sigma = \sqrt{29073.75} = 170.569(\text{en Km})$$

Exercice N°4 :

1) En utilisant une calculatrice et en présentant les calculs dans un tableau, on détermine la moyenne arithmétique $\overline{X}$ puis la variance et enfin l'écart type σ

Groupe d'âge	X_i	n_i	$n_i x_i$	x_i^2	$n_i x_i^2$
[15,25[	20	29391	587820	400	11756400
[25,35 [	30	304255	9127650	900	273829500
[35,45 [	40	350086	1400344	1600	560137600
[45,55 [	50	296121	14806050	2500	740302500
[55,65 [	60	261308	15678480	3600	940708800
[65,75 [	70	147789	10345230	4900	724166100
75 ans et plus	80	67856	5428480	6400	434278400
Totaux		1456806	69977150		3685179300

Moyenne arithmétique : $\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{7} n_i X_i}{N} \approx 48(ans)$

Variance : $V = \frac{\sum_{i=1}^{7} n_i x_i^2}{N} - \overline{X}^2 = \frac{3.685.179300}{1.456.806} - 2304 = 2529{,}6294 - 2304$

D'où : $V \simeq 225$,Ecart type $\sigma = \sqrt{v} \simeq 15(\text{ans})$

2) on a : $\overline{X} - \sigma \le x \le \overline{X} + \sigma$ En remplacent on obtient : $48-15 \le x \le 48+15$ par suite $33 \le x \le 63$

Cette double inégalité nous donne l'intervalle

$[33,63] = [33,35[\cup [35,55[\cup [55,63[$

Effectif correspondant l'intervalle [33,35[Pour calculer cet effectif, on suppose que la réparation des observations dans l'intervalle [25,35[est linéaire et on utilise la proportionnalité .On obtient : $\frac{304.255\times(35-33)}{35-25} = 60851$

Effectif correspondant à l'intervalle $[35,55[$

Cet effectif est donné directement par le tableau .On obtient :350086+296121= 646.207

Effectif correspondant à l'intervalle $[35,63[$ Le calcul est semblable à celui pratiqué pour détermination de l'effectif correspondant à l'intervalle [33,35[.on obtient :

$$\frac{26308(63-55)}{65-55} = \frac{261{,}308\times8}{10}$$

Effectif correspondant à l'intervalle [33,63] :60851 +646.207 +209.046 =916.104

Interprétation, en Pourcentage, du résultat obtenu $\frac{916.104\times100}{1456801}$ =62,88%

Ainsi 62,88 % des chefs de ménage ont un âge compris entre 33 ans et 63 ans

3) $\overline{x} - 2\sigma \le x \le \overline{x} + 2\sigma$

En remplaçant $\overline{x}$ *et* σ par leurs valeurs on obtient :$48-30 \le x \le 48+30$

Soit : $18 \le x \le 78$

Un calcul analogue à celui fait dans la question 2 donne, comme effectif correspondant à l'intervalle $[18,78]$, le résultat suivant : 1,400488

Interprétation en pourcentage de ce résultat : $\frac{1{,}400488\times100}{1456806}$ =96,13%

Ainsi, 96,13 % des chefs de ménage ont écart à la moyenne arithmétique x=48 est inférieure ou égale au double de l'écart type σ.

Exercice N°5:

1) La moyenne des puissances utilisées dans l'agence A est :

$$\overline{X_A} = \frac{4\times6+5\times10+6\times16+7\times8+8\times3+9\times3}{6+10+16+8+3+3} = \frac{277}{46} = 6.02$$

La moyenne des puissances utilisées dans l'agence B est :

$$\overline{X_B} = \frac{4\times15+5\times6+6\times4+7\times4+8\times6+9\times11}{15+6+4+4+6+11} = \frac{289}{46} = 6.28$$

2) a)

$$(\sigma_A)^2 = \frac{6\times(4-6.02)^2+10\times(5-6.02)^2+16\times(6-6.02)^2+8\times(7-6.02)^2+3\times(8-6.02)^2+3\times(9-6.02)^2}{46}$$

$= 1.76$ d'où $\sigma_A = 1.32$

$$(\sigma_B)^2 = \frac{15\times(4-6.28)^2+6\times(5-6.28)^2+4\times(6-6.28)^2+4\times(7-6.28)^2+6\times(8-6.28)^2+11\times(9-6.28)^2}{46}$$

$= 4.11$ d'où $\sigma_B = 2.02$

b) On a $\overline{X_A} \simeq \overline{X_B}$ mais $\sigma_B > \sigma_A$ donc :

* La moyenne des voitures utilisées dans l'agence A ont pour puissances très proches de la moyenne qui est presque 6 chevaux, et par suite le chef de l'agence A a raison.
* La majorité des voitures utilisées dans l'agence B ont pour puissances loin de la moyenne qui est presque 6 chevaux, et par suite le chef de l'agence B doit donc acheter des voitures de 4 ou de 9 chevaux.

EXERCIEC 6:

Xi \ Yi	42,5	47,5	52,5	57,5	Distribution Marginale de X
152,5	18	10	2	0	30
157,5	3	16	5	1	25
162,5	0	5	13	5	23
167,5	0	2	6	14	22
Distribution marginale de Y	21	33	26	20	100

$$\bar{x} = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{4} n_i x_i = \frac{1}{100}(30\times152,5+25\times157,5+23\times162,5+22\times167,5) = 159,35$$

$$\bar{y} = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{4} n_i y_i = \frac{1}{100}(21\times42,5+33\times47,5+26\times52,5+20\times57,5) = 49,49 \ ;$$

$$V(X) = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{4} n_i x_i^2 - \bar{x}^2 = 31,82 \quad ; \quad V(Y) = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{4} n_i y_i^2 - \bar{y}^2 = 26,68$$

Exercice N°7

1. En utilisant une calculatrice et en disposant les calculs dans un tableau, vérifier que :
$\bar{x}$ =16,84(ha) ; $\bar{y}$ =30,60(ha)

On remarque que $\bar{y}$ est plus grand que $\bar{x}$ .Cela signifie que les exploitions de la région B sont, en moyenne, plus grandes que celles de la région A.

2. Le calcul, disposé suivant un tableau, donne les résultats suivants :
σ_A =22,32(ha) ; $\sigma_B = 36,96(ha)$

σ_A étant inférieur à σ_B ,il semble que la région B possède des exploitations ayant des superficies plus dispersées que celles des exploitations de la région A , mais il ne faut pas oublier que la superficie moyenne dans la région B est plus grande que celle de la région A. Cela montre que l'utilisation unique des écart type ne permet pas une comparaison objective des dispersions dans les deux séries .Dans ce cas et dans ceux qui

sont similaires, on introduit le rapport est $\frac{écart-type}{moyenne\ \ arithmétique}$ .Ce rapport mesure la dispersion relative et de donne une réponse au problème posé.

Pour la région A, on a : $r_A = \frac{22,32}{16,84} = 1,325$

Pour la région B, on a : $r_B = \frac{36,96}{30,6} = 1,208$ On peut alors conclure que les superficies des exploitations de la région B sont moins dispersées que celles des exploitions de la région A.

EXERCICE 8 :1) 2) $G(\bar{X},\bar{Y})$ avec

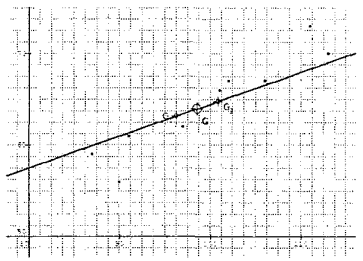
$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{10} = \frac{985}{10} = 98,5$ et $\bar{Y} = \frac{\sum Y_i}{10} = \frac{640}{10} = 64$

3) Le point $G_1(\bar{x}_1,\bar{y}_1)$ avec

$\bar{x}_1 = \frac{87+87+90+91+97}{5} = 90,4$

et $\bar{y}_1 = \frac{56+59+59+61+62}{5} = 59,4$

G_1(90,4 ;59 ,4). Le point $G_2(\bar{x}_2,\bar{y}_2)$ avec



$\bar{x}_2 = \frac{106+113+111+102+101}{5} = 106,6$; $\bar{y}_2 = \frac{70+73+67+67+66}{5} = 68,6$ G_2=(106,6 ;68,6)

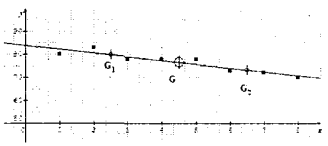
4) L'équation de la droite (G_1G_2) est de la forme y = ax + b , avec :

$$\begin{cases} a = \frac{y_{G_2}-y_{G_1}}{x_{G_2}-x_{G_1}} = \frac{68,6-59,4}{106,6-90,4} = 0,568 \\ b = y_{G_1} - ax_{G_1} = 59,4-90,4\times0,568 = 8,053 \end{cases} \Rightarrow (G_1G_2) : y = 0,568x + 8,053.$$

5) Pour x=120 dinars y=0,568x120+8,053=76,213. La dépense est estimée égal à 76,213 dinars pour une recette de 120 dinars.

EXERCICE 9

2)Coordonnées des points G_1 et G_2 : Le point G_1 du nuage formé par les quatre premiers points $G_1(\bar{X}_1,\bar{Y}_1)$.



$\bar{x}_1 = \frac{1+2+3+4}{4} = 2,5$ et

$\bar{y}_1 = \frac{80+83+78+78}{4} = \frac{319}{4} = 79,75$ G_1(2,5 :79,75).

Le point G_2 du nuage formé par les quatre derniers points à $G_2(\overline{X}_2,\overline{Y}_2)$ $\overline{x}_2=\frac{5+6+7+8}{4}=\frac{26}{4}=6,5$ et

$\overline{y}_2=\frac{78+73+72+70}{4}=\frac{293}{4}=73,25$,$G_2(6,5\ ;73,25)$.

3) La droite (G_1G_2) a une équation de la forme y = ax+b avec : $a=\frac{y_{G_2}-y_{G_1}}{x_{G_2}-x_{G_1}}=\frac{73,25-79,75}{6,5-2,5}=-1,625$ et

$b=y_{G_1}-ax_{G_1}=79,75+1,625\times2,5=83,8125\Rightarrow(G_1G_2)$: y= - 1,625x+83,8125.

4) L'année 2008 correspond au rang 11 , ordonnée du point de la droite (G_1G_2) d'abscisse 11, est approximativement égal à 66.

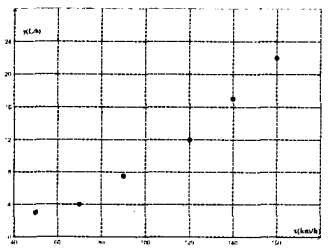
Le chiffre d'affaire de l'entreprise en 2008 est estimé égal à 66 (milliers de dinars)

5) $Y\leq60\Leftrightarrow$ -1,625x+83,8125$\leq60\Leftrightarrow$ 1,625x$\geq$23,8125$\Leftrightarrow$ x > $\frac{23,8125}{1,625}$ or $\frac{23,8125}{1,625}\approx14,654$ Le premier nombre entier supérieur à ce nombre est 15.Donc c'est en l'année de rang 15 que le chiffre d'affaire est inférieur à 60 milles dinars (pour la première fois). L'année de rang 15 est 2012.

Exercice n°10 :

1) a) le nuage des points $M_i(x_i,y_i)$ semble plutôt d'allure parabolique que rectiligne. Il ne serait pas pertinent de chercher un ajustement affine entre x et y.

b)



Vitesse x (km/h)	50	70	90	120	140	160
$z=\sqrt{y}$	1,73	2	2,74	3,64	4,12	4,7

Le nuage des points correspondants l'alignement assez prononcé des points $M_i(x_i,z_i)$ incite cette fois ci à chercher un ajustement affine entre x et z.

2) a) $x_{G_1}=\frac{50+70+90}{3}=70$; $z_{G_1}=\frac{1,73+2+2,74}{3}=2,15$ donc $G_1(70;2,15)$

$x_{G_2}=\frac{120+140+160}{3}=140$; $z_{G_2}=\frac{3,46+4,12+4,7}{3}=4,7$ donc $G_2(140;4,7)$

$(G_1G_2):z=ax+b$ où $a=\frac{4,7-2,15}{140-70}=0,028$ et $2,15=0,028\times70+b\Rightarrow b=0b19$ donc

$\boxed{(G_1G_2):z=0,028x+0,19}$

b) $y=z^2=(0,028x+0,19)^2=0,0008x^2+0,0106x+0,0361$ qui est donc un ajustement du second degré entre y et x.

3) a) pour x = 100 ; $y=0,0008\times(100)^2+0,0106\times100+0,0361\approx9,1$ litres

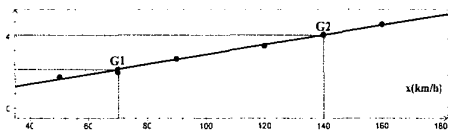
b) pour x =0 ; y = 0,0361 litres

c) pour $y=6\Rightarrow z=\sqrt{6}\approx2,45$.

L'équation :

$z=0,028x+0,19=2,45\Rightarrow x\approx80,7\,km/h$.

Cette vitesse est celle permise pour, en un heure,consommer les six litres de carburant restants en cet heure et à cette vitesse, on peut donc envoie rouler 80,7 km.



Exercice11 : 1)a) $E=10$, $\sigma(E)=5,163$. b) $\overline{R}=2,56$; $\sigma(R)=1,103$

2)a) le marge de point de la série (E,R) $G_1(6,1,708)$; $G_2(15,3,625)$

$(G_1G_2):y=ax+b$, $a=\frac{y_{G_2}-y_{G_1}}{x_{G_2}-x_{G_1}}=0,213$; $b=y_G-ax_G=2,56-0,213\times10=0,43$

D'où $(G_1G_2):y=0,213x+0,43$

d) si $E=25cm\Rightarrow R=0,213\times25+0,43=5,755m^2.c/w$

Correction

Exercice 1: 1) La réponse est a) car: $p(\{4,5,6\})=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$,

2)b) ,3) La réponse est b)car: $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=0,10+0,58-0=0,68$; $A\cap B=\varnothing$

4)c) , 5) La réponse est b)car: $p(\overline{A})=1-p(A)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}=0,75$

6) La réponse est c)car :on lance un dé normal

Soit $A=\{1,2,3,4,5\}\Rightarrow p(A)=\frac{5}{6}$ et $B=\{5\}\Rightarrow p(B)=\frac{1}{6}$ et $A\cup B=\{1,2,3,4,5\}\subset\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$

Exercice 2: 1)a) Soit A l'événement « Tirer 3 boules blanches et deux boules rouges »

Soit Ω :l'univers des cas possibles. $p(A)=\frac{card(A)}{card(\Omega)}=\frac{C_6^3\times C_4^2}{C_{10}^5}=\frac{20\times 6}{36\times 7}=\frac{20}{42}=\frac{10}{21}$

b) Soit B l'événement : »obtenir au moins une boule rouge »

$\overline{B}$ est l'événement contraire de « toutes les boules tirées sont blanches »

$$p(B)=1-p(\overline{B})=1-\frac{card(\overline{B})}{card(\Omega)}=1-\frac{C_6^5}{C_{10}^5}=1-\frac{6}{36\times 7}=1-\frac{1}{42}=\frac{41}{42}$$

2)a) Soit A' l'événement : »Tirer avec remise trois boules blanches et deux boules rouges dans cet ordre »

$$p(A')=\left(\frac{6}{10}\right)^3\times\left(\frac{4}{10}\right)^2=\frac{216\times 16}{100000}=\frac{3456}{100000}=0,03456$$

b) Soit B' l'événement : «tirer avec remise trois boules blanches et deux boules rouges »

$$p(B')=C_5^2\times\left(\frac{6}{10}\right)^3\times\left(\frac{4}{10}\right)^2=10\times 0,03456=0,3456$$

Exercice 3: Soit Ω l'univers des cas possibles ; $card(\Omega)=C_5^2=10$

1) $p(A)=\frac{card(A)}{card(\Omega)}$, or $card(A)=C_3^2+C_2^2=3+1=4\Rightarrow p(A)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

2) $card(B)=C_2^1\times C_2^1=4$ (Avoir 1 boule n°=1 et une boule n°=2), $p(B)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

3) $A\cap B$: « Avoir une boule verte n°=1 et une boule verte n°=2 ou avoir une boule rouge n°=1 et une boule verte n°=2» $card(A\cap B)=C_1^1\times C_1^1+C_1^1\times C_1^1=1+1=2$

•$p(A\cap B)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$ On a :$p(A)=\frac{2}{5}$; $p(\overline{B})=1-p(B)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$

•$p(A\cap\overline{B})+p(A\cap B)=p(A)$ d'où $p(A\cap\overline{B})=p(A)-p(A\cap B)=\frac{2}{5}-\frac{1}{5}=\frac{1}{5}\Rightarrow p(A\cap\overline{B})=\frac{2}{5}+\frac{3}{5}-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$

Exercice 4: $A:\{R,R,R\}$ ou $\{V,V,V\}$ 1) •$p(A)=\frac{C_5^3+C_4^3}{C_9^3}=\frac{10+4}{84}=\frac{1}{6}$ •$p(B)=\frac{C_6^3+C_3^3}{C_9^3}=\frac{20+1}{84}=\frac{21}{84}=\frac{1}{4}$

2) $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$ On calcule $p(A\cap B)$, $A\cap B$

« Avoir trois boules de même couleur et de même numéros

$R_1R_1R_1$ ou $V_1V_1V_1$ »$\Rightarrow p(A\cap B)=\frac{C_3^3+C_3^3}{C_9^3}=\frac{2}{84}=\frac{1}{42}$ D'où $p(A\cup B)=\frac{1}{6}+\frac{1}{4}-\frac{1}{42}=\frac{11}{28}$

3) Soit C l'événement : « obtenir au plus une boule verte »

$C:\{V,R,R\}$ ou $\{R,R,R\}\Rightarrow p(C)=\frac{C_4^1C_5^2+C_5^3}{C_9^3}=\frac{40+10}{84}=\frac{50}{84}=\frac{25}{42}$

Exercice 5: Card $(\Omega)=6^3$. 1) $p(A)=\frac{3\times 5\times 5}{6^3}=\frac{75}{216}=\frac{25}{72}$; $p(A)\approx 0,34$

2) B « obtenir au moins une fois le numéro 1 » ; $\overline{B}$: obtenir 3 faces ne contenant pas le numéro 1 »

$p(B)=1-\frac{5^3}{6^3}=\frac{216-125}{216}=\frac{91}{216}$; $p(B)\approx 0,42$

3) $p(C)=\frac{6\times 5\times 4}{6^3}=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$; $p(C)\approx 0,55$ .4) $D=\overline{C}$ d'où $p(D)=\frac{4}{9}$; $p(D)\approx 0,45$

5) $p(E)=\frac{6\times 5\times 3}{6^3}=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$; $p(E)\approx 0,42$

6) La somme est paire si les trois chiffres sont paires ou si un seul chiffre est pair et les deux autres sont impairs. $p(F)=\frac{3^3+3^2\times 3\times 3}{6^3}=\frac{4}{2^3}=\frac{1}{2}$; $p(F)=0,5$

Exercice 6: On considère les événements suivants :

M:« l'élève Choisi aime la musique » S : « l'élève Choisi aime le sport»

$p(M)=\frac{28}{100}=0,28$; $p(S)=\frac{22}{100}=0.22$; $p(M\cap S)=\frac{18}{100}=0,18$

1) Soit l'événement A : « l'élève choisi aime la musique ou le sport»

$A=M\cup S$, $p(A)=p(M\cup S)=p(M)+p(S)-p(M\cap S)=0,28+0,22-0,18=0,32$

2) Soit l'événement B : « l'élève choisi n'aime ni la musique ni le sport»

$B=\overline{M\cup S}$, $p(B)=p(\overline{M\cup S})=1-p(M\cup S)=1-0,32=0,68$

3) Soit l'événement B : « l'élève choisi aime la musique et n'aime pas le sport »

$C=M\setminus S$, $p(C)=p(M)-p(M\cap S)=0,28-0,18=0,10$

Exercice 7 : $p(E)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$. $p(F)=p(E_1\cup E_2)=\frac{1}{2}+\frac{3}{5}-\frac{3}{10}=\frac{4}{5}$

$p(G)=p(\overline{E_1}\cup\overline{E_2})=p(\overline{E_1\cap E_2})=1-\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$. $p(H)=p(E_1\cup E_2)-p(E_1\cap E_2)=\frac{4}{5}-\frac{3}{10}=\frac{1}{2}$.

Exercice 8 : 1) Il y a C_{18}^3 façons de prélever 3 flacons parmi les 18 flacons obtenus Card $(\Omega)=C_{18}^3=816$

A : « Les trois flacons contiennent du sang d'un même groupe» $p(A)=\frac{C_{11}^3+C_4^3}{C_{18}^3}=\frac{169}{816}$; $p(A)\approx 0,20$

2) B:«Un flacon au moins est du groupe A», $\overline{B}$:«Les trois flacons ne contiennent pas de sang de groupe A»

$p(B)=1-\frac{C_7^3}{C_{18}^3}=1-\frac{35}{816}=\frac{781}{816}$; $p(B)\simeq 0,95$

3) C : « Les sang des trois flacons appartiennent à trois groupes distincts»

$p(C)=\frac{11\times4\times2+11\times2\times1+4\times2\times1}{816}=\frac{162}{408}$; $p(C)\simeq 0,198$

Exercice 9 : * $\text{card}\Omega=5^5=3125$ * $\text{card}A=5!=120$ et $p(A)=\frac{120}{3125}\simeq 0.038$

* $\text{card}B=5$ et $p(B)=\frac{5}{3125}=0.002$ * $C=\overline{A}$ et $p(C)=1-p(A)\simeq 0.962$

Exercice 10 : Il y a 36 éventualités .

1) E : « G = A * B » on a alors $\alpha=\beta$. $p(E)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$, $p(E)\approx 0,166$

2) F : « $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ » on a alors : $2\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}=\vec{0}$. C'est-à-dire (α,β)=(2,1) ou (α,β)=(4,2) ou (α,β)= (6,3) ; $p(F)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$.

3) $\left\|\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}\right\|=9$ s'écrit (α+β) . $\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=9$; $MG=1\Leftrightarrow\alpha+\beta=9$.

Soit H : « α + β = 9 » : 4 possibilités : (6,3) ; (3,6) ; (5,4) et (4,5) . $p(H)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$; $p(H)\approx 0,11$.

Exercice 11: Soit Ω l'univers des cas possibles, $\text{card}(\Omega)=C_7^3=35$

1) • $p(A)=\frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}=\frac{C_4^3+C_3^3}{35}=\frac{4+1}{35}=\frac{5}{35}=\frac{1}{7}$ • $p(B)=\frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)}=\frac{C_3^3+C_4^3}{35}=\frac{1+4}{35}=\frac{5}{35}=\frac{1}{7}$

$A\cap B$ est l'événement : « avoir tiré 3 jetons rectangle noirs» $p(A\cap B)=\frac{\text{card}(A\cap B)}{\text{card}(\Omega)}=\frac{C_3^3}{35}=\frac{1}{35}$

2) $p(A)\times p(B)=\frac{1}{7}\times\frac{1}{7}=\frac{1}{49}$ et $p(A\cap B)=\frac{1}{35}\Leftrightarrow p(A\cap B)\neq p(A)\times p(B)$ Donc les événements A et B ne sont pas indépendants

Exercice 12: $p(A)=\frac{2\times1+2\times1+1\times1}{6\times6}=\frac{5}{36}$, $p(B)=\frac{2\times1+2\times1+2\times1+21+1\times1}{36}=\frac{1}{4}$.

Soit :"Une seule fois le n°1" alors $C=B\cup D$ .donc : $p(C)=p(B)+p(D)-p(B\cap D)$ or

$p(D)=\frac{2\times5+1\times4}{36}=\frac{7}{18}$ et $p(D\cap B)=\frac{2\times1+2\times1}{36}=\frac{1}{9}$ alors $p(C)=\frac{19}{36}$.

Exercice 13 1) $\text{card}\Omega=C_{12}^4=\frac{12\times11\times10\times9}{4\times3\times2}=495$ et $\text{card}A=C_4^2\times C_3^1\times C_5^1+C_5^2\times C_4^1\times C_3^1=270$ donc

$\boxed{p(A)=\frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega}=\frac{270}{495}=\frac{6}{11}}$. $\text{card}B=C_4^4+C_5^4+C_4^2\times C_5^2=66$ donc $p(B)=\frac{\text{card}B}{\text{card}\Omega}=\frac{66}{495}=\frac{2}{15}$.

$\text{card}C=C_4^4+C_3^3\times C_9^1=10$ alors $p(C)=\frac{\text{card}C}{\text{card}\Omega}=\frac{10}{495}=\frac{2}{99}$.

$\text{card}D=C_1^1\times C_3^2\times C_6^1+C_2^1\times C_3^1\times C_6^2=18+90=108$ alors $p(D)=\frac{\text{card}D}{\text{card}\Omega}=\frac{108}{495}=\frac{12}{55}$.

2) $\text{card}\Omega=A_{12}^3=12\times11\times10=1320$. $\text{card}E=3!\times A_4^1\times A_3^1\times A_5^1=360$ alors $\boxed{p(E)=\frac{\text{card}E}{\text{card}\Omega}=\frac{360}{1320}=\frac{3}{11}}$.

$\text{card}F=\frac{3!}{2!}\times A_5^2\times A_3^1=180$ alors $\boxed{p(F)=\frac{\text{card}F}{\text{card}\Omega}=\frac{180}{1320}=\frac{3}{22}}$.

Pour $E\cap F$, il y a trois cas : $\begin{cases} B & 0 & 1 & 1 \\ N & 1 \text{ ou } 1 \text{ ou } 0 \text{ alors :} \\ V & 1 & 0 & 1 \end{cases}$

$\text{card}(E\cap F)=3!\times A_1^1\times A_2^1\times A_2^1+3!\times A_1^1\times A_2^1\times A_1^1+3!A_1^1\times A_1^1\times A_2^1=48$ alors

$\boxed{p(E\cap F)=\frac{\text{card}E\cap F}{\text{card}\Omega}=\frac{48}{1320}=\frac{2}{56}}$ et par suite $\boxed{p(E\cup F)=p(E)+p(F)-p(E\cap F)=\frac{3}{11}+\frac{3}{22}-\frac{2}{56}=\frac{41}{110}}$.

On a $E'=\overline{E}$ alors $\boxed{p(E')=1-p(E)=1-\frac{3}{11}=\frac{8}{11}}$

Exercice 14: 1) a)* $p(A)=\frac{C_2^2}{C_{n+2}^2}=\frac{1}{\frac{(n+2)!}{2!n!}}=\frac{2}{(n+2)(n+1)}$

* B : « avoir deux boules de même couleurs, c'est-à-dire 2 rouges ou 2 noires»

$p(B)=\frac{C_2^2+C_n^2}{C_{n+2}^2}=\frac{1+\frac{n(n-1)}{2}}{\frac{(n+2)(n+1)}{2}}=\frac{2+n^2-n}{(n+2)(n+1)}$

b) $p(A)=\frac{1}{15}\Leftrightarrow\frac{2}{(n+2)(n+1)}=\frac{1}{15}\Leftrightarrow(n+2)(n+1)=30\Leftrightarrow n^2+3n+2=30\Leftrightarrow n^2+3n-28=0$

$\Delta=9+4\times28=121=11^2$, $n_1=\frac{-3+11}{2}=\frac{8}{2}=4$ ou $n_2=\frac{-3-11}{2}=\frac{-14}{2}=-7\notin\mathbb{N}\Rightarrow\boxed{n=4}$

2) L'urne contient : 4 noires et deux rouges soit $N_0N_1N_1N_2$ et R_1R_2

a) Soit E l'événement : « avoir deux boules de même couleurs »

$p(E)=\frac{A_4^2+A_2^2}{A_6^2}=\frac{4\times3+2\times1}{6\times5}=\frac{12+2}{30}=\frac{14}{30}=\frac{7}{15}$

b) Soit F l'événement : « avoir deux boules de même parité»c'est-à-dire 2 pairs ou 2 impairs :

$p(F)=\frac{A_3^2+A_3^2}{A_6^2}=\frac{3\times2+3\times2}{6\times5}=\frac{6+6}{30}=\frac{12}{30}=\frac{2}{5}$

c) Soit H l'événement : « avoir au moins une boule qui porte le numéros 1»

$\overline{H}$: « Aucune des boules ne porte le numéro 1»

$p(\overline{H})=\frac{A_3^2}{A_6^2}=\frac{3\times2}{6\times5}=\frac{1}{5}$ d'où $p(H)=1-p(\overline{H})=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$

Exercice 15 : 1) On note p_1 la probabilité d'avoir pile .On note p_2 la probabilité d'avoir face.

Des égalités $\begin{cases} p_1=2p_2 \\ p_1+p_2=1 \end{cases}$ on déduit que $p_2=\frac{1}{3}$ et $p_1=\frac{2}{3}$

2)a) $p_a=p_1\times p_1\times p_1\times p_1=p_1^4=\frac{16}{81}\simeq0.2$

b) Au moins trois pile se traduit par :(trois piles et une face) ou (les quatre piles).

$p_b=4(p_1\times p_1\times p_1\times p_2)+p_1^4=4\left(\frac{8}{27}\times\frac{1}{3}\right)+\frac{16}{81}=\frac{48}{81}\simeq0.6$

c) pour la premier fois pile au troisième lance se traduit par face, face, pile, face ou face, face, pile, pile

Ainsi $p_c=\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{27}\simeq0.074$

Exercice 16 : Il y a 2^{10} réponses possibles soit 1024 .

1) A : « Répondre juste aux 10 questions » $p(A)=\frac{1}{2^{10}}=\frac{1}{1024}\approx0{,}001$.

2) B : « Répondre juste à 9 questions » $p(B)=\frac{10}{1024}\approx0{,}0097$.

3) C : « Répondre juste au moins à 8 question »

Il y a C_{10}^8 façons de répondre juste à 8 questions exactement , soit 45 façons et par suite :

$p(C)=\frac{1+10+45}{1024}=\frac{56}{1024}$; $p(C)\approx0{,}054$.

Exercice 17 :1) $\text{card}(\Omega)=3^4=81$, 2) $p(A)=\frac{3^2}{81}=\frac{1}{9}\simeq0{,}111$; $p(B)=\frac{3}{81}=\frac{1}{27}=0{,}037$

C :«choisir 2 couleurs parmi 3 et arranger ces 2 couleurs dans 4 carrefours et dans les 2 autres mettre le couleur non choisie » $p(C)=\frac{3A_4^2}{81}\simeq0{,}444$

3) $p(D)=1-p(\overline{D})=1-\frac{1}{81}=\frac{80}{81}\simeq0{,}987$, $p(E)=\frac{C_4^2\times2^2}{81}=\frac{24}{81}\simeq0{,}296$

F= VAVA ou AVAY , $p(F)=\frac{2\times2^2}{81}=\frac{8}{81}\simeq0{,}098$

Exercice 18 :

Dépense \ Catégorie	Au foyer	Salaire	Total
Moins de 40 DT	98	19	117
Entre 40 et 100DT	203	28	231
Plus que 100 DT	0	2	2
Total	301	49	350

2)a) $p_1=0.86$, b) $p_2=\frac{117}{350}\simeq0.33$, c) $p_3=p_1+p_2-\frac{98}{350}\simeq0.91$

3)a) (les trois femmes sont des salariées) ou (sont aux foyers) $p_a=\left(\frac{301}{350}\right)^3+\left(\frac{49}{350}\right)^3\simeq0.64$

b) $p_b=\left(\frac{117}{350}\right)^3+\left(\frac{231}{350}\right)^3+\left(\frac{2}{350}\right)^3\simeq0.32$,c) $p_c=\left[\left(\frac{98}{350}\right)^3+\left(\frac{203}{350}\right)^3+\left(\frac{19}{350}\right)^3+\left(\frac{28}{350}\right)^3+\left(\frac{2}{350}\right)^3\right]\simeq0.22$

d) $p_d=\left(\frac{49}{350}\right)\times\left(\frac{301}{350}\right)^2\times3\simeq0.31$

Exercice 19 : I) Soit Ω l'univers des cas possibles, $\text{card}(\Omega)=C_{10}^3=120$

1) • $p(A)=\frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}=\frac{C_5^3+C_3^3}{120}=\frac{10+1}{120}=\frac{11}{120}$, $p(B)=\frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)}=\frac{C_5^1\times C_3^1\times C_2^1}{120}=\frac{5\times3\times2}{120}=\frac{30}{120}=\frac{1}{4}$

$p(C)=\frac{\text{card}(C)}{\text{card}(\Omega)}=\frac{C_5^2\times C_5^1+C_3^2\times C_7^1+C_2^2\times C_8^1}{120}=\frac{50+21+8}{120}=\frac{79}{120}$

Soit l'événement $\overline{D}$: « l'élève tire aucune question de probabilité»

$p(\overline{D})=\frac{\text{card}(\overline{D})}{\text{card}(\Omega)}=\frac{C_8^3}{120}=\frac{56}{120}=\frac{7}{15}\Rightarrow p(D)=1-p(\overline{D})=1-\frac{7}{15}=\frac{8}{15}$

2) Soit l'événement $C\cap D$: « l'élève tire une question de probabilité et deux question de géométrie ou une question de probabilité et deux questions d'analyse ou deux questions de probabilité et une question parmi 8 questions d'analyse et de géométrie»

$p(C\cap D)=\frac{\text{card}(C\cap D)}{\text{card}(\Omega)}=\frac{C_2^1\times C_3^2+C_2^1\times C_5^2+C_2^2\times C_8^1}{120}=\frac{6+20+8}{120}=\frac{34}{120}=\frac{17}{60}$

• $p(C\cup D)=\frac{\text{card}(C\cup D)}{\text{card}(\Omega)}=p(C)+p(D)-p(C\cap D)=\frac{79}{120}+\frac{64}{120}-\frac{34}{120}=\frac{109}{120}$

II) Soit E l'univers des cas possibles : $\text{card}(E)=A_{10}^3=10\times9\times8=720$

1) • $p(H)=\frac{\text{card}(H)}{\text{card}(E)}=\frac{C_3^1\times A_2^2\times A_8^1}{720}=\frac{3\times2\times8}{720}=\frac{48}{720}=\frac{1}{15}$

• $p(F)=\frac{card(F)}{card(E)}=\frac{C_3^1\times A_2^1\times A_8^2+A_8^3}{720}=\frac{3\times2\times56+336}{720}=\frac{336+336}{720}=\frac{272}{720}=\frac{14}{15}$

2) • $p(G)=\frac{card(G)}{card(E)}=\frac{C_3^1\times A_3^1\times A_7^2}{720}=\frac{3\times3\times42}{720}=\frac{378}{720}=\frac{21}{40}$

Exercice 20 : Ω est l'événement de toute combinaisons des 3 boules parmi 11. $card(\Omega)=C_{11}^3=\frac{11!}{3!\times8!}=165$

• $p(A)=\frac{card(A)}{card(\Omega)}=\frac{C_5^3+C_4^3}{165}=\frac{10+4}{165}=\frac{14}{165}$ • $p(B)=\frac{card(B)}{card(\Omega)}=\frac{C_2^2\times C_9^1}{165}=\frac{1\times9}{165}=\frac{9}{165}$

• $p(C)=\frac{card(C)}{card(\Omega)}=\frac{C_5^2\times C_6^1+C_5^3}{165}=\frac{10\times6+10}{165}=\frac{60+10}{165}=\frac{70}{165}=\frac{14}{33}$

• $p(D)=\frac{card(D)}{card(\Omega)}=\frac{C_4^3+C_3^2\times C_4^1}{165}=\frac{4+3\times4}{165}=\frac{16}{165}$

2) Ω' est l'événement de toutes arrangements des 4 boules parmi 11.

$card(\Omega')=A_{11}^4=11\times10\times9\times8=7920, p(A_1)=\frac{card(A_1)}{card(\Omega')}=\frac{C_4^1\times A_4^1\times A_7^3}{7920}=\frac{4\times4\times7\times6\times5\times}{7920}=\frac{14}{33}$

$p(B_1)=\frac{card(B_1)}{card(\Omega')}=\frac{C_4^2\times A_5^2\times A_4^2}{7920}=\frac{6\times20\times12}{1920}=\frac{2}{11}$

$p(C_1)=\frac{card(C_1)}{card(\Omega')}=\frac{A_4^4+A_7^4+A_4^2\times A_7^2}{7920}=\frac{24+840+504}{7920}=\frac{1368}{7920}=\frac{19}{110}$

Exercice 21: 1)Card $(\Omega)=A_{10}^2=90$ .D:« tirer deux boules de même numéro »

$p(D)=\frac{A_4^2+A_4^2+A_2^2}{90}=\frac{13}{45}$; $p(A)\approx0,288$

2 $p(A)=\frac{1}{45}$ $(ac=9)$; $p(A)\approx0,022$

3) $p(B)=p(\overline{A})$ car $ac\le9$ et par suite $\Delta\ge0$. $p(B)=\frac{44}{45}$; $p(B)\approx0,977$

$x'=\frac{3-\sqrt5}{2}$ *et* $x''=\frac{3+\sqrt5}{2}$, $\frac{c}{a}=1$ *et* $\frac{6}{a}=3\Leftrightarrow a=2$ *et* $c=2, P(C)=\frac{A_4^2}{90}=\frac{2}{15}$; $P(C)\approx0.133$

Exercice 22 : Pour $n\in\{2,3,4,5,6\}$ on a: $p_{n+1}-p_n=r$ et $p_1=\frac{1}{15}$

1) $p_2=p_1+r$, $p_3=p_2+r=\frac{1}{15}+2r$; (p_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme

$p_1=\frac{1}{15}$ Donc $p_n=p_1+(n-1)r=\frac{1}{15}+(n-1)r$

2)On a $S=p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6=1$

$S=(p_1+p_6)\times\frac{6}{2}=\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{15}+5r\right)\times3$ d'où $\left(\frac{2}{15}+5r\right)\times3=1\Leftrightarrow5r=\frac{1}{3}-\frac{2}{15}\Leftrightarrow r=\frac{1}{25}$

$\Rightarrow p_2=\frac{1}{15}+\frac{1}{25}=\frac{8}{75}$; $p_3=\frac{1}{15}+\frac{2}{25}=\frac{11}{75}$; $p_4=\frac{1}{15}+\frac{3}{25}=\frac{14}{75}$; $p_5=\frac{1}{15}+\frac{4}{25}=\frac{17}{75}$; $p_6=\frac{1}{15}+\frac{5}{25}=\frac{20}{75}$

3)Soit A l'événement : «obtenir un nombre premier » $p(A)=p_2+p_3+p_5=\frac{8+11+17}{75}=\frac{36}{75}=\frac{12}{25}$

4)Soit B l'événement : « obtenir un nombre pair» $p(B)=p_2+p_4+p_6=\frac{8+14+20}{75}=\frac{42}{75}=\frac{14}{25}$

Exercice 23 :1) a) $p(A)=\frac{C_4^1\times C_3^2}{C_7^3}=\frac{12}{35}$, $p(B)=\frac{C_5^2\times C_2^1}{C_7^3}=\frac{20}{35}=\frac{4}{7}$.

b) $p(A\cap B)=\frac{C_3^1\times C_2^1\times C_1^1+C_1^1\times C_2^2}{C_7^3}=\frac{7}{35}\Rightarrow p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=\frac{12}{35}+\frac{20}{35}-\frac{7}{35}=\frac{25}{35}=\frac{5}{7}$

2) (0,0,-1,1) ou(2,-1,-1,0)ou(1,1,-1,-1). $p(s)=\frac{4!}{2!}\left(\frac{2}{7}\times\frac{1}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{4}\right)+\frac{4!}{2!}\left(\frac{1}{7}\times\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}\times\frac{2}{4}\right)+\frac{4!}{2!2!}\left(\frac{2}{7}\times\frac{1}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}\right)$

$=12\times\frac{2}{210}+12\times\frac{1}{210}+6\times\frac{1}{210}=\frac{1}{15}$. •$(B;R)\Rightarrow p(C)=\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}=\frac{2}{7}$

3) $M\in(O,\vec{u})\setminus\{O\}\Leftrightarrow Z\in\mathbb{R}^*\Leftrightarrow a\ne0$ et $b=0$ $(a=\overline{0},b=0)\Rightarrow p(G)=\frac{3}{5}\times\frac{5}{7}=\frac{3}{7}$.

• $M\in\zeta_{(O,\sqrt2)}\Leftrightarrow OM=\sqrt2\Leftrightarrow|Z|=\sqrt2\Leftrightarrow\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt2\Leftrightarrow a^2+b^2=2\Rightarrow(a,b)=(1,1)$ ou $(a,b)=(-1,1)$

$\Rightarrow p(H)=\frac{2}{7}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{7}\times\frac{2}{5}=\frac{8}{35}$

Exercice 24 : $p(A)=\frac{C_8^4-2}{C_{16}^4}=\frac{68}{1820}\approx0,037$, $p(B)=\frac{10}{C_{16}^4}=\frac{10}{1820}=\frac{1}{182}\approx0,005$,

$p(C)=1-\frac{C_{12}^4}{C_{16}^4}=1-\frac{495}{1820}\approx0,728$, $p(D)=\frac{4\times3\times2\times1}{C_{16}^4}=\frac{6}{455}\approx0,013$,

Exercice25: 1) $p(A_1)=\frac{C_4^3+C_6^3}{C_{12}^3}=\frac{24}{220}=\frac{6}{55}\approx0,109$,

$p(B_1)=\frac{C_2^2\times C_{10}^1+C_4^2\times C_8^1+C_6^2\times C_6^1}{220}=\frac{37}{55}\approx0,672$,ou $p(B_1)=1-\frac{24+48}{220}=1-\frac{72}{220}=1-\frac{18}{55}=\frac{37}{55}\approx0,672$

* Soit D_1 « Obtenir trois jetons portant des numéros pairs $C_1=A_1\cup D_1$.

$p(A_1)=\frac{6}{55}$, $p(D_1)=\frac{C_6^3}{C_{12}^3}=\frac{20}{220}=\frac{1}{11}$, $p(A_1\cap D_1)=\frac{1}{220}$ d'où $p(C_1)=\frac{6}{55}+\frac{1}{11}-\frac{1}{220}=\frac{43}{220}\approx0,195$

2) $p(A_2)=\frac{5\times A_{10}^4}{A_{12}^6}=\frac{5\times10\times9\times8\times7}{12\times11\times10\times9\times8\times7}=\frac{5}{132}\approx0,038$

$$p(B_2)=\frac{3\times5\times A_{10}^4+3\times6\times A_{10}^4}{A_{12}^6}=\frac{33\times A_{10}^4}{A_{12}^6}=\frac{33}{12\times11}=\frac{1}{4}=0{,}25$$

3) $p(A_3)=\dfrac{C_6^2\times4^2\times6^4}{12^6}=\dfrac{15\times4^2\times6^4}{12^6}=\dfrac{2^8\times3^5\times5}{2^{12}\times3^6}=\dfrac{5}{2^4\times3}=\dfrac{5}{48}\approx0{,}104$

$$p(B_3)=\frac{2^3\times4^3\times2+2^3\times6^3\times2+4^3\times6^3\times2}{12^6}=\frac{2^7\times251}{2^{12}\times3^6}\approx0{,}01$$

Exercice 26 : 1) Soit A l'événement : « un acheteur de trois billets gagne exactement 30 dinars»

$$p(A)=\frac{C_5^1\times C_{84}^2+C_{10}^3}{C_{100}^3}$$

2) Soit B l'événement : « un acheteur de trois billets gagne au moins 20 dinars»

B_1 l'événement : « un acheteur de trois billets ne gagne aucun dinar»

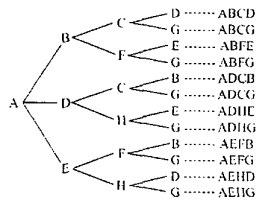
B_2 l'événement : « un acheteur de trois billets gagne 10 dinars» On a: B_1 et B_2 sont incompatibles

$(B_1\cap B_2=\varnothing)$ et $B=\overline{B_1\cup B_2}\Rightarrow p(B)=p(\overline{B_1\cup B_2})=1-p(B_1\cup B_2)=1-(p(B_1)+p(B_2))=1-p(B_1)-p(B_2)$

Or $p(B_2)=\dfrac{C_{10}^1\times C_{84}^2}{C_{100}^3}=\dfrac{3486}{16170}=\dfrac{83}{385}$ et $p(B_1)=\dfrac{C_{84}^3}{C_{100}^3}=\dfrac{23821}{40425}=\dfrac{3403}{5775}$

Et par suite $p(B)=1-\dfrac{3403}{5775}-\dfrac{83}{385}=\dfrac{15778}{80850}=\dfrac{161}{825}$

Exercice 27 : **Solutions Partie I**



1) On complète l'arbre suivant

2) a) La probabilité que la Cigale finisse sa promenade en A est nulle.

b) En revanche, la probabilité qu'elle finisse chez la Fourmi vaut $\dfrac{6}{12}=\dfrac{1}{2}$

Partie II 1) Chaque sommet est relié à 3 arêtes. Un chemin partant de A utilise une arête issue de A. Il reste à la Cigale une autre possibilité pour repasser en A, en utilisant les deux autres arêtes. Il sera alors impossible de revenir en A, car toutes les arêtes auront été déjà empruntées.

Pour un sommet autre que A, chaque chemin utilise donc deux arêtes sur les trois. Si la Cigale décide de revenir vers ce sommet (par la troisième arête), elle se retrouvera bloquée car elle ne pourra pas emprunter une arête déjà utilisée .Dans tous les cas, la Cigale ne peut pas passer trois fois par un sommet.

2)En complétant l'arbre, on obtient les 18 chemins possibles : ABCDAEFB, ABCDAEFG, ABCDAEHD, ABCDAEHG,ABCDHEAD, ABCDHEFB, ABCDHEFG, ABCDHG,ABCG, ABFG, ABFEADCB,

ABFEADCG, ABFEADHE, ABFEADHG,ABFEHDAE, ABFEHDCB, ABFEHDCG, ABFEHG.

3)Il y a 10 possibilités d'arrêt en G, et 8 blocages, donc la Cigale a plus de chance de finir chez la Fourmi.

4) a)probabilité que la Cigale arrive chez la Fourmi en 4h exactement est de $\dfrac{2}{18}=\dfrac{1}{9}$

b) La probabilité qu'elle arrive en 5 heures exactement est nulle.

c) Celle qu'elle arrive en 6 heures ou plus est de $\dfrac{8}{18}=\dfrac{4}{9}$

d) Enfin, la probabilité qu'elle arrive chez la Fourmi sans repasser par un sommet déjà emprunté est de $\dfrac{6}{18}=\dfrac{1}{3}$

Exercice 28 : a) Partant du point G, sans revenir sur ses traces, les possibilités sont les suivantes

AEFG - AEHG - AEFBCG - AEHDCG - AEFBCDHG - AEHDCBFG

ABCG - ABFG - ABCDHG - ABFEHG - ABCBHEFG - ABFEHDCG

ADHG - ADCG - ADHEFG - ADCBFG - ADHEFBCG - ADCBFEHG.

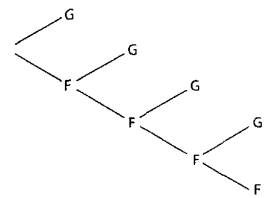
Il y a donc dix-huit chemins possibles au total.

b) Il suffit de calculer la longueur de chacun des chemins précédents en utilisant la dimension des arêtes. On trouve que les chemins les plus courts ont tous une longueur de 20 mètres : ce sont les six chemins suivants

AEFG - AEHG - ABCG - ABFG - ADHG - ADCG

c) La probabilité de choisir un des chemins les plus courts est $p=\dfrac{6}{18}=\dfrac{1}{3}$

Exercice 29 On peut s'intéresser à la composition des familles au niveau de la progéniture (avec les conditions décrites dans le texte, couples fidèles et parents appelés à disparaître au plus tard après FFFF).



Types de familles	M	FM	FFM	FFFM	FFFF
Probabilité associée	0,5	$0,5^2$	$0,5^3$	$0,5^4$	$0,5^4$
Nombre de mâles	1	1	1	1	0
Nombre de femelles	0	1	2	3	4

Si on a p couples de parents (même nombre de mâles espérer donner naissance à de femelles au départ), ces p couples peuvent

$p\times(0,5+0,5^2+0,5^3+0,5^4)=0,9375p$ mâles.

Ce qui amène à espérer une population constituée à part égale de mâles et de femelles.

Exercice 30

1. Le nombre de triplets, donc d'issues possibles est $6^3=216$.
2. a. Non, car, si 0 était solution, on aurait $c=0$, or $c\geqslant1$.
   b. x, x^2, a, b et c étant strictement positifs, il en est de même pour ax^2+bx+c.
   c. -1 est solution si et seulement si : $a-b+c=0$, ou $b=a+c$.
   Formons les 15 triplets tels que $b=a+c$:

$a = 1$, $c = 1, 2, 3, 3, 4$ ou 5,	$b = 1 + c$ d'où les triplets : (1,2,1) (1,3,2,) (1,4,3) (1,5,4) (1,6,5)
$a = 2$, $c = 1, 2, 3$ ou 4	$b = 2 + c$ d'où les triplets : (2,3,1) (2,4,2,) (2,5,3) (2,6,4)
$a = 3$, $c = 1, 2$, ou 3	$b = 3 + c$ d'où les triplets : (3,4,1) (3,5,2,) (3,6,3)
$a = 4$, $c = 1$ ou 2,	$b = 4 + c$ d'où les triplets : (4,5,1) (4,6,2,)
$a = 5$, $c = 1$,	$b = 6$ d'où le triplet : (5,6,1)

3. a. a, b, c, doivent vérifier les inégalités . : $a \leqslant b + c$, $b \leqslant c + a$, $c \leqslant a + b$, où l'égalité correspond à un triangle aplati . Seuls les cas 2)et 5) ne les vérifient pas toutes.

b. Il y a 6 triangles équilatéraux : (1,1,1), (2,2,2), (3,3,3)(4,4,4) (5,5,5) et (6,6,6) La probabilité d'obtenir un tel triangle, sachant que la construction d'un triangle est possible, est donc $\frac{6}{256} = \frac{1}{26}$.

c. Si le triangle (a, b, c) est rectangle et si $a \leqslant b \leqslant c$, on a $c^2 = a^2 - b^2$ qui admet la solution $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$.

En construisant le tableau ci-dessous qui donne pour chaque couple (a, b) tel que $1 \leqslant a \leqslant b \leqslant 6$ la valeur de $a^2 + b^2$, et en y cherchant les carrés parfaits inférieurs à 37, on voit que c'est la seule solution.

a \ b	1	2	3	4	5
1	2				
2	5	8			
3	10	13	18		
4	17	20	25	32	
5	26	29	34		
6	37				

En permutant les lettres a, b, c on obtient donc six triangles rectangles : (3,4,5) (3,5,4) (4,3,5) (4,5,3) (5,3,4) et (5,4,3) et la probabilité $\frac{6}{156} = \frac{1}{26}$.

d. Outre les six triangles équilatéraux, les triangles isocèles possibles, sont :
(1,1,2)
(2,2,1), (2,2,3), (2,2,4)
(3,3,1), (3,3,2), (3,3,4), (3,3,5), (3,3,6)
(4,4,1), (4,4,2), (4,4,3), (4,4,5), (4,4,6)
(5,5,1), (5,5,2), (5,5,3), (5,5,4), (5,5,6)
(6,6,1), (6,6,2), (6,6,3), (6,6,4), (6,6,5)

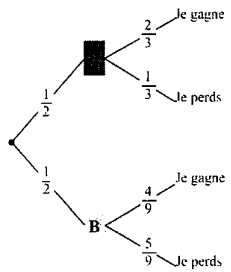
et pour chacun d'eux les deux qui s'en déduisent par permutation, tels (1,2,1) et (2,1,1)
donc en tout : $3(1+3+5+5+5)+6 = 78$; il y a donc $156 - 78 = 78$ triangles non isocèles.

Exercice31 :1)Seul le résultat obtenu avec le dé bleu intervient dans cette question. Ce résultat est supérieur à celui obtenu avec le dé Rouge si et seulement si ce résultat est 8, ce qui se produit 2 fois sur 6. Le dé étant équilibré, les six résultats sont équiprobables, on en déduit que la probabilité cherchée est1/3.
2)On considère ici les 36 couples de résultats possibles, supposés équiprobables. Le résultat obtenu avec le dé Bleu est inférieur à celui obtenu avec le dé Vert si et seulement si le dé Bleu affiche 2 alors que le dé Vert affiche 6, ce qui se produit 16 fois sur 36. L'égalité étant impossible, on en déduit que le résultat obtenu avec le dé Bleu est supérieur à celui obtenu avec le dé Vert dans 20 cas sur 36. on en déduit que la probabilité cherchée est 20/36 soit 5/9.
3)a)Si je choisis le dé Bleu, l'organisateur choisit le dé rouge et gagne 4 fois sur 6, si je choisis le Vert, il choisi le Bleu et gagne 5 fois sur 9, si je choisis le Rouge, il choisit le Vert et gagne en moyenne 4 fois sur

6) Dans chacun des cas, il peut choisir un dé plus favorable que le mien !
b) D'après ce qui précède, le dé le moins défavorable pour moi est le dé vert, que je choisis donc. L'organisateur, soucieux de ses intérêts, choisit alors le dé Bleu. Les 36 parties possibles me coûteraient au total 36 D et me rapporteraient $\frac{5}{9} \times 36 \times 2.5 = 50$ D, le jeu m'est donc favorable.

4.

La situation peut être décrite grâce à l'arbre ci-contre.
La probabilité de gagner pour moi est
$P(G) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{9} = \frac{5}{1}$.
Le jeu m'est donc maintenant favorable.



Exercice 32: 1)l'équation (E) : $x^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions distinctes si, et seulement si, $\Delta = b^2 - 4c > 0 \Leftrightarrow c \leq \frac{1}{4}b^2$.La condition $c \leq \frac{1}{4}b^2$ exprime que M est au dessous de la parabole.

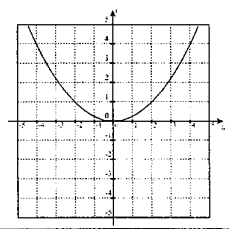
2) Il y a 11×11=121 couples (b,c) de même probabilité $\frac{1}{121}$

Un décompte sur la figure montre que le nombre de points a coordonnées entières qui satisfont $c > \frac{1}{4}b^2$ et $-5 \leqslant b \leqslant 5$, $-5 \leqslant c \leqslant 5$ est égal à $9 + 7 + 7 + 5 + 3 = 31$ et le nombre de ceux qui satisfont $c = \frac{1}{4}b^2$ est égal à 5.

On déduit $P(A) = \frac{121 - 36}{121} = \frac{85}{121}$ et $P(B) = \frac{5}{121}$.

3. a. En comptant le nombre de carrés contenus dans la partie colorée et le nombre de carrés ayant une intersection non nulle avec cette partie, on trouve que l'aire $\mathcal{A}$ est comprise entre 22 et 36 cm². La moyenne est 29.

b. On peut alors évaluer $P(A)$ à $\frac{81}{100} = 0.81$ et $P(B)$ à 0.
Le jardinier peut prendre comme valeur approchée de l'aire $\mathcal{A}$ de la partie colorée le produit de l'aire du carré ABCD par la proportion p de fleurs qui sont dans cette partie colorée.



Devoir de contrôle N°2

Exercice n°1 : 1) $f'(-2)=2$ et $f'(-1)=0$. 2)a) i) et ii) b) $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)+1}{x-1}=-4$, c) $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)+1}{x-1}=0$.

3) a) g est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $g'(x)=2ax+b$.

b) L'équation de la tangente à ζ_f au point d'abscisse 0 est : $y=2x+1$ donc $g'(0)=2$ et $g(0)=1$ alors b = 2 et c = 1. D'autre part $g'(-1)=f'(-1)=0$ alors -2a + 2 = 0 donc a = 1. Ainsi : a = 1, b =2 et c = 1.

4) a) $x\mapsto x^2+x$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$ donc h est continue sur $\mathbb{R}_+$. $x\mapsto\frac{x}{x-1}$ est rationnelle définie pour $x\neq 1$ continue sur $]-\infty,0[$. $\lim\limits_{0^+}h=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x^2+x}=0=h(0)$. $\lim\limits_{0^-}h=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x}{x-1}=0=h(0)$ donc h est continue en 0 et par suite h est continue sur $\mathbb{R}$.

b) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{h(x)-h(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x-1}=-1$ alors h est dérivable à gauche en 0 et $h'_g(0)=-1$.

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{h(x)-h(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}}=+\infty$ alors h n'est pas dérivable à droite en 0. ζ_h admet au point O deux demi tangentes : $T_g\begin{cases}y=-x\\x\le 0\end{cases}$ et $T_d\begin{cases}x=0\\y\ge 0\end{cases}$.

c) $x\mapsto x^2+x$ est dérivable et strictement positive sur $]0,+\infty[$ et pour $x>0, h'(x)=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$.

$x\mapsto\frac{x}{x-1}$ est dérivable sur $]-\infty,0[$ et pour $x<0, h'(x)=-\frac{1}{(x-1)^2}$.

Exercice n°2 : 1) a) $f(x)=0\Leftrightarrow 4\cos^2(x)-\sqrt{3}^2=0\Leftrightarrow(2\cos x-\sqrt{3})(2\cos x+\sqrt{3})=0$

$\Leftrightarrow 2\cos x-\sqrt{3}=0$ ou $2\cos x+\sqrt{3}=0\Leftrightarrow\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow\cos x=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ ou $\cos x=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{6}+2k\pi\\ \text{ou } x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi\end{cases}, k\in\mathbb{Z}$ ou $\begin{cases}x=\frac{5\pi}{6}+2k'\pi\\ \text{ou } x=-\frac{5\pi}{6}+2k'\pi\end{cases}, k'\in\mathbb{Z}$

donc

$S_{\mathbb{R}}=\left\{x=\frac{\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{x=-\frac{5\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$

et $S_{[0,\pi]}=\left\{\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right\}$.

b)

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
$2\cos x-\sqrt{3}$		+	0	-		-	
$2\cos x+\sqrt{3}$		+		+	0	-	
$f(x)$		+	0	-	0	+	

2) a) $g(x)=f(x)-\sqrt{3}\sin(2x)+2\sin^2(x)=g(x)=4\cos^2(x)-3-\sqrt{3}\sin(2x)+2\sin^2(x)$

$=4(1-\sin^2(x))-3-\sqrt{3}\sin(2x)+2\sin^2(x)=1-2\sin^2(x)-\sqrt{3}\sin(2x)=\cos(2x)-\sqrt{3}\sin(2x)$ or

$a\cos(2x)+b\sin(2x)=r\cos(2x-\varphi)$ alors $r=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=2$ et $\begin{cases}\cos\varphi=\frac{a}{r}=\frac{1}{2}\\ \text{et } \sin\varphi=\frac{b}{r}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ donc $\varphi=-\frac{\pi}{3}$ et

par suite $g(x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)=2\sin\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)$.

b) $\frac{g(x)-1}{f(x)}\le 0$. Il faut que $f(x)\neq 0$ et comme $x\in[0,\pi]$ alors $x\neq\frac{\pi}{6}$ et $x\neq\frac{5\pi}{6}$.

$g(x)-1=0\Leftrightarrow$

$\sin\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sin\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow 2x+\frac{5\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $2x+\frac{5\pi}{6}=\pi-\frac{5\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{3}+k\pi$ ou $x=k\pi, k\in\mathbb{Z}$ or $x\in[0,\pi]$ il y a deux cas :

⊗si $x=-\frac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow 0\le-\frac{\pi}{3}+k\pi\le\pi, k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\frac{1}{3}\le k\le\frac{2}{3}, k\in\mathbb{Z}$ donc $k=1\Rightarrow x=\frac{2\pi}{3}$

⊗si $x=k\pi, k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow 0\le k\pi\le\pi, k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow 0\le k\le 1, k\in\mathbb{Z}$ donc $k=0$ ou $k=1\Rightarrow x=0$ ou $x=\pi$

donc $x\in\left\{\frac{2\pi}{3},0,\pi\right\}$.

$\boxed{S_{[0,\pi]}=\left[0,\frac{\pi}{6}\right[\cup\left[\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right[}$

3) a)

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
$g(x)-1$	0	-		-	0	+		+	0
$f(x)$		+	0	-		-	0	+	
$\frac{g(x)-1}{f(x)}$	0	+	‖	+	0	-	‖	+	0

$\cos x.f(x)=\cos x(4\cos^2(x)-3)=4\cos$

et

$\cos 3x=\cos(2x+x)=\cos 2x\cos x-\sin$ [illegible]

$=2\cos^3(x)-\cos x-2(1-2\cos^2(x))\cos x=4\cos^3(x)-3\cos x$ donc $\boxed{\cos 3x=\cos x.f(x)}$

b) $A=4\cos^3\left(\frac{\pi}{9}\right)-3\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)=\cos\left(3\times\frac{\pi}{9}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\Rightarrow\boxed{A=\frac{1}{2}}$

Exercice N° 3 : $f(x)=\frac{5-x^2}{x-3}$; $D_f=\mathbb{R}\setminus\{3\}$

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}-x=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}-\frac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}-x=+\infty$;

$\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}-\frac{4}{0^+}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}-\frac{4}{0^-}=+\infty$

2) a) f est une fonction rationnelle donc dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ et $\forall x\neq 3$, on a :

$$f'(x)=\frac{-2x(x-3)-1(5-x^2)}{(x-3)^2}=\frac{-2x^2+6x-5+x^2}{(x-3)^2}=\frac{-x^2+6x-5}{(x-3)^2}$$

b) $f'(x)=0$ signifie que $-x^2+6x-5=0$; $a+b+c=-1+6-5=0$ donc $x'=1$ et $x''=5$

c) -2 est un minimum local et -10 est un maximum local.

x	$-\infty$		-1		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗ $+\infty$	‖ $-\infty$	↗	-10	↘	$-\infty$

3) a) $T: y=f'(0)x+f(0)=-\frac{5}{9}x+\left(-\frac{5}{3}\right)=-\frac{5}{9}x-\frac{5}{3}$

b) $\Delta: y=-\frac{5}{9}x$; $f'(x_0)=-\frac{5}{9}\Leftrightarrow\frac{-x_0^2+6x_0-5}{(x_0-3)^2}=-\frac{5}{9}$

$\Leftrightarrow 9x_0^2-54x_0+45=5(x_0^2-6x_0+9)$

$\Leftrightarrow -9x_0^2+54x_0-45=5x_0^2-30x_0+45\Leftrightarrow 14x_0^2-84x_0+90=0\Leftrightarrow 7x_0^2-42x_0+45=0$;

$\Delta'=21^2-7\times45=441-315=126$; $x_0'=\frac{-21-\sqrt{126}}{7}$ et $x_0''=\frac{-21+\sqrt{126}}{7}$

Exercice 4: 1)a) .b) $A(x_A,y_A): x_A=2\cos(-\frac{\pi}{6})=2\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$; $y_A=2\sin(-\frac{\pi}{6})=2\times(-\frac{1}{2})=-1$

$C(x_C,y_C): x_C=2\cos(\frac{\pi}{4})=2\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$; $y_C=2\sin(\frac{\pi}{4})=2\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

2) OABC est un losange

b) $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})\equiv(\overrightarrow{OA},\vec{i})+(\vec{i},\overrightarrow{OC})[2\pi]\equiv\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}[2\pi]\equiv\frac{5\pi}{12}[2\pi]\Rightarrow(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})\equiv(\overrightarrow{OA},\vec{i})+(\vec{i},\overrightarrow{OB})\equiv\frac{5\pi}{24}[2\pi]$

$\Rightarrow(\overrightarrow{OA},\vec{i})+(\vec{i},\overrightarrow{OB})\equiv\frac{5\pi}{24}[2\pi]$, $(\vec{i},\overrightarrow{OB})\equiv\frac{5\pi}{24}-\frac{\pi}{6}[2\pi]\equiv\frac{\pi}{24}[2\pi]$

c) On a $OB=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\sqrt{3}\,\vec{i}-\vec{j}+\sqrt{2}\,\vec{i}+\sqrt{2}\vec{j}=(\sqrt{3}+\sqrt{2})\vec{i}+(\sqrt{2}-1)\vec{j}\Rightarrow B(\sqrt{3}+\sqrt{2};\sqrt{2}-1)$

d) $OB=\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2+(\sqrt{2}-1)^2}=\sqrt{3+2\sqrt{6}+2+2-2\sqrt{2}+1}=\sqrt{2\sqrt{6}-2\sqrt{2}+8}$

$\cos\left(\frac{\pi}{24}\right)=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2\sqrt{6}-2\sqrt{2}+8}}$; $\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2\sqrt{6}-2\sqrt{2}+8}}$

Devoir de synthèse n2

Exercice n°1 : 1)

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$

3) a) $D_g=\mathbb{R}\setminus\{0;3\}=D$

b) f est dérivable et non nulle sur D alors g est dérivable sur D et pour tout $x\in D$, on

$a: g'(x)=-\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$. c)

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$	
$g(x)$	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{1}{4}$	↗	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

Exercice 2: 1)a) f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ (fonction rationnelle) et on a $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$

$$f'(x)=\frac{(2ax+b)(x-2)-(ax^2+bx+2)}{(x-2)^2}=\frac{2ax^2-4ax+bx-2b-ax^2-bx-2}{(x-2)^2}=\frac{ax^2-4ax-2b-2}{(x-2)^2}.$$

b) $\begin{cases} f'(4)=0 \text{ or } f'(4)=\frac{16a-16a-2b-2}{(4-2)^2}=\frac{-b-1}{2} \\ f(4)=7 \text{ or } f(4)=\frac{16a+4b+2}{4-2}=8a+2b+1=7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{-b-1}{2}=0 \Rightarrow \boxed{b=-1} \\ 8a+2b+1=7\Rightarrow\boxed{a=1}\end{cases}$

2)a) $f(x)=\frac{x^2-x+2}{x-2}$; $f'(x)=\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}$

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	7	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x\mapsto-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\mapsto-\infty}\frac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\mapsto-\infty}x=-\infty$; $f(0)=1$; $f(4)=7$

$\lim\limits_{x\mapsto+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}x=+\infty$

b) f admet un maximum relatif en 0 égal à -1 et un minimum relatif en 4 égal à 7

3) T_g // D : $y=-3x+5$; $f'(a)=-3$

$\frac{a^2-4a}{(a-2)^2}=-3\Rightarrow-3(a^2-4a+4)=a^2-4a\Rightarrow4a^2-16a+12=0$; $a=1$; $a=3$

$T_1: y=f'(1)(x-1)+f(1)$; $f'(1)=-3$; $f(1)=-2\Rightarrow T_1: y=-3(x-1)-2\Rightarrow\boxed{T_1: y=-3x+1}$

$T_3: y=f'(3)(x-3)+f(3)$; $f'(3)=-3$; $f(3)=8\Rightarrow T_3: y=-3(x-3)+8\Rightarrow\boxed{T_3: y=-3x+17}$

4)a) $\lim\limits_{x\mapsto 4^-} g(x)=\lim\limits_{x\mapsto 4^-} f(x)=7$; $\lim\limits_{x\mapsto 4^-} g(x)=\lim\limits_{x\mapsto 4^-}\sqrt{4-x}+2x-1=7$; $\lim\limits_{x\mapsto 4^-} g(x)=\lim\limits_{x\mapsto 4^-} g(x)=7$ donc g est contenue en 4

b) $\lim\limits_{x\mapsto 4^-}\frac{g(x)-g(4)}{x-4}=\lim\limits_{x\mapsto 4^-}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=f'(4)=0$ donc g est dérivable à droite en 4 et on a $g'_d(4)=0$

$\lim\limits_{x\mapsto 4^-}\frac{g(x)-g(4)}{x-4}=\lim\limits_{x\mapsto 4^-}\frac{\sqrt{4-x}+2x-1-7}{x-4}=\lim\limits_{x\mapsto 4^-}\frac{\sqrt{4-x}}{-(4-x)}+\frac{2(x-4)}{x-4}=\lim\limits_{x\mapsto 4^-}\frac{\sqrt{4-x}}{-\sqrt{4-x}\sqrt{4-x}}+2$

$=\lim\limits_{x\mapsto 4^-}\frac{1}{-\sqrt{4-x}}+2=-\infty$ donc g n'est pas dérivable à gauche en 4

c)i) $\boxed{\text{Faux}}$ car g n'est pas dérivable à gauche en 4 ; ii) $\boxed{\text{Vrai}}$ car $g'_d(4)=0$

iii) $\boxed{\text{Faux}}$ car $\lim\limits_{x\mapsto 4^-}\frac{g(x)-g(4)}{x-4}=-\infty$ ζ_g admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut

Exercice3 : I)1) $Z_B=1+i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$,

$Z_C=\overline{Z_B}=2(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3})=2(\cos(-\frac{\pi}{3})+i\sin(-\frac{\pi}{3}))$

2)

$Z_B^{2008}=2^{2008}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{2008}=2^{2008}\left(\cos 2008\frac{\pi}{3}+i\sin 2008\frac{\pi}{3}\right)=2^{2008}\left(\cos\left(669\pi+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(669\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$=2^{2008}\left(-\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{2^{2008}}{2}-i\frac{2^{2008}\sqrt{3}}{2}=-\left(2^{2007}+i2^{2007}\sqrt{3}\right)$

3) OB=$|1+i\sqrt{3}|=2$; OC=$|1-i\sqrt{3}|=2$; $(Z_B-Z_O)+(Z_C-Z_O)=2\Leftrightarrow\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}\Leftrightarrow$ OABC est un parallélogramme et comme OB=OC donc OBAC est un losange

5) $M\in\zeta\Leftrightarrow|z-2|=|z|\Leftrightarrow AM=OM\Leftrightarrow\zeta$ est la médiatrice du $[OA]$.

II)1) a) $Z=Z'\Leftrightarrow Z(Z-2)=-4\Leftrightarrow Z^2-2Z+4=0\Leftrightarrow(Z-1)^2-1+4=0\Leftrightarrow(Z-1)^2+3=0$

b) $(Z-1)^2+3=0\Leftrightarrow(Z-1)^2=\left(i\sqrt{3}\right)^2\Leftrightarrow Z-1=i\sqrt{3}$ *ou* $Z-1=-i\sqrt{3}\Leftrightarrow Z=1+i\sqrt{3}$ *ou* $Z=1-i\sqrt{3}$.

c) Si on remplace Z par $1+i\sqrt{3}$ *ou* $1-i\sqrt{3}$, on trouve Z' = Z donc les points associe à B et C sont respectivement B et C.

2) a) $|Z'-2|=\left|\frac{-4}{Z-2}-2\right|=\left|\frac{-4-2Z+4}{Z-2}\right|=\frac{2|Z|}{|Z-2|}$

b) $M\in\zeta\Leftrightarrow|Z-2|=|Z|$ donc $|Z'-2|=2\Leftrightarrow AM'=2\Leftrightarrow\delta$ est le cercle de centre A et de rayon 2.

c) On a : $Z_D=\frac{Z_B^2}{Z_C}$ $|Z_D|=\left|\frac{Z_B^2}{Z_C}\right|=|Z_B|=|Z_C|\Rightarrow OD=OB=OC$ *d'ou B, D et C* appartiennent a un cercle de centre O

d) $CD=|Z_D-Z_C|=\left|\frac{Z_B^2}{Z_C}-Z_C\right|=\left|\frac{Z_B^2-Z_C^2}{Z_C}\right|=\frac{|Z_B-Z_C||Z_B+Z_C|}{|Z_C|}=\frac{BC\times 2}{2}=BC$ donc CD = BC.

Exercice N° 4 : 1) $f(x)=2x^3-6x+4$; f est dérivable sur IR et $\forall x\in IR$ On a :

$f'(x)=6x^2-6=6(x^2-1)$; $f'(x)=0$ signifie que $x=1$ ou $x=-1$; $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$;

$f(1)=0$ et $f(-1)=8$

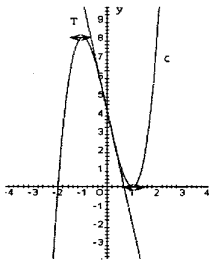
2) On a : si $x\in IR$; $2\times0-x=-x\in IR$; $f(2\times0-x)=f(-x)=2(-x)^3+6x+4$

$=-2x^3-6x+4+4-4=-(2x^3-6x+4)+8=2\times4-f(x)$ D'où $I(0;4)$ est un centre de symétrie à ξ_f

3) $T: y=f'(0)x+f(0)=-6x+4$

4) $f(x)=y=2x^3-6x+4+6x-4=2x^3$

5) Voir courbe



6) $x^3-3=\frac{m-4}{2x}$ signifie que $2x^2-6x+4=m$

- Si $m\in]0;8[$; l'équation admet 3 solutions.
- Si $m\in]8;+\infty[$; l'équation admet 1 solution.
- Si $m\in]-\infty;0[$; l'équation admet 1 solution.
- Si $m=8$; l'équation admet 2 solutions.
- Si $m=0$; l'équation admet 2 solutions.

7) β et $\alpha\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$;$\alpha<\beta$ alors $\cos(\alpha)>\cos(\beta)$ car $x\mapsto\cos x$ est décroissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$; $\cos(\alpha)$ et $\cos(\beta)$ sont deux éléments $[0;1]$ et f est décroissante sur $[0;1]$ donc $f(\cos(\alpha))<f(\cos(\beta))$.

8) $g(x)=|2x+4|(x-1)^2$

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
g(x)	$+\infty$	↘	0	↗	8	↘	0	↗	$+\infty$

a) $g(x)=|f(x)|$; Soit ζ_1 la partie de ζ_f située au dessus de $(O;\vec{i})$ et ζ_2 la partie de ζ_f située au dessous de $(O;\vec{i})$ donc $\zeta_g=\zeta_1\cup S_{(O;\vec{i})}(\zeta_2)$

Devoir de contrôle n°3

Exercice 1 : A)

a) $N_1=C_5^3+C_3^3=11$

b) $N_2=C_2^1\times C_8^2=56$

c) $N_3=C_4^1\times C_2^1\times C_1^1+C_3^2\times C_2^1=8+6=14$

d) $N_4=C_{10}^3-C_6^3=100$

B)

1)a) $(k+1)!-k!=(k+1)k!-k!=k!(k+1-1)=k!k$

b) On a $1(1!)=2!-1!$

$2(2!)=3!-2!$

$3(3!)=4!-3!$

.

.

$n(n!)=(n+1)!-n!$

En faisant la somme on obtient : $1(1!)+2(2!)+....+n(n!)=(n+1)!-1$

2) $\dfrac{1(1!)+2(2!)+....+n(n!)}{(n-1)!}=12 \Leftrightarrow \dfrac{1+(n+1)!-1}{(n-1)!} \Leftrightarrow n(n+1)=12 \Leftrightarrow n^2+n-12=0$

$\Delta=1+48=49$, $n=-4\notin\mathbb{N}$ ou $n=3\in\mathbb{N}$, $S_{\mathbb{N}}=\{3\}$

Exercice2 : $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x+1}$

1) $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+1}$; $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1$ D'autre part $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[a+\dfrac{b}{x}+\dfrac{c}{x^2+x}\right]=a \Leftrightarrow \boxed{a=1}$

b) $\lim\limits_{x\to(-1)}(x+1)f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)}(x^2-2x+1)=4$ D'autre part

$\lim\limits_{x\to(-1)}(x+1)f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)}(x+1)(ax+b)+c=c \Leftrightarrow \boxed{c=4}$

c) $f(0)=1$ d'autre part $f(0)=b+c \Leftrightarrow b+c=1 \Leftrightarrow b=1-c \Leftrightarrow \boxed{b=-3}$

2)a) $f(x)=x-3+\dfrac{4}{x+1}$ On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-3)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x+1}=0$ donc la droite $\Delta : y=x-3$ est une asymptote à (C_f) au voisinage de $(+\infty)$, de même au voisinage de $(-\infty)$.

b) $f(x)-(x-3)=\dfrac{4}{x+1}$; $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

3) f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty,-1[$ et $]-1,+\infty[$ et on a :

$f'(x)=1-\dfrac{4}{(x+1)^2}=\dfrac{(x+1)^2-4}{(x+1)^2}$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)-(x-3)$		-	‖	+	
Position de ζ_f % à Δ		ζ_f est au dessous de Δ	‖	ζ_f est au dessous de Δ	

$=\dfrac{(x+1-)(x+1+2)}{(x+1)^2}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x+1)^2}$

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	‖	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-8	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

$f'(x)=0 \Rightarrow x=1$ ou $x=-3$

4) voir figure (C_f)

5) $h(x)=\dfrac{f(x)-|f(x)|}{2}$

⊗ si $f(x)\geq 0 \Rightarrow \begin{cases}|f(x)|=f(x)\\ \text{et } x\in]-1,+\infty[\end{cases} \Rightarrow h(x)=0, \forall x\in]-1,+\infty[$ donc ζ_h est la demi-droite d'équation : $\begin{cases}y=0\\ \text{et } x\geq -1\end{cases}$.

⊗ si $f(x)<0 \Rightarrow \begin{cases}|f(x)|=-f(x)\\ \text{et } x\in]-\infty,-1[\end{cases} \Rightarrow h(x)=f(x), \forall x\in]-\infty,-1[$ donc $\zeta_h=\zeta_f$ $\forall x\in]-\infty;-1[$.

Exercice3 : $f(x)=\sin(2x)$

1) f est périodique de période $T=\dfrac{2\pi}{|a|}=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$

2)a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $[0,\pi]$ et on a : $f'(x)=2\cos 2x$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	0	↗	1	↘	-1	↗	0

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \cos 2x=0 \Leftrightarrow 2x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi ; k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2} ; k\in\mathbb{Z}$ ou $x\in[0,\pi] \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{4}$ ou $x=\dfrac{3\pi}{4}$

b) Soit $M(x,y)\in C_f\cap(O,\vec{i}) \Leftrightarrow \begin{cases}y=f(x)\\ y=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow f(x)=0 \Leftrightarrow \sin 2x=0 \Leftrightarrow 2x=k\pi \Leftrightarrow x=\dfrac{k\pi}{2}$ or $x\in[0,\pi]$

$\Leftrightarrow x=0$ ou $x=\dfrac{\pi}{2}$ ou $x=\pi$

$C_f\cap(O,\vec{i})=\left\{O(0,0);(\dfrac{\pi}{2},0);(\pi,0)\right\}$

Soit $A(4,4)\in C_f\cap(O,\vec{j}) \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\ y=f(x)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\ y=f(0)=0\end{cases} \Rightarrow C_f\cap(O,\vec{j})=\{O(0,0)\}$

c) voir figure :

3) * si $m\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\Rightarrow$ il n'y a pas de solutions

* si $m=-1$ ou $m=1 \Rightarrow 2$ solutions

*si $-1<m<1 \Rightarrow 4$ solutions

4))

$$\otimes \lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\tan(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}}{x}}{\frac{\tan(x)}{x}} \text{ or } \lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}=1 \text{ et}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} \text{ avec } g(x)=\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right) \text{ donc}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}}{x}=g'(0)=2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-1 \text{ alors } \boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\tan(x)}=-1}.$$

$$\otimes\otimes \lim_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^{+}}\frac{2f(x)+1}{x+\frac{\pi}{12}}=2\times\lim_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^{+}}\frac{f(x)+\frac{1}{2}}{x+\frac{\pi}{12}}=2\lim_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^{+}}\frac{f(x)-f\left(-\frac{\pi}{12}\right)}{x-\left(-\frac{\pi}{12}\right)}=2\times f'\left(-\frac{\pi}{12}\right)=2\times 2\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=2\sqrt{3}$$

Exercice 4 **:A)**

A) 1- C 2- C 3-A 4-B 5-B

B)**I)** 1) Faux 2) Vrai 3) Faux

II) 1) Faux 2) Faux 3) Faux 4) Faux 5) Faux

Devoir de synthèse n3 exempele1

Exercice 1 :A)

Exercice n°1 :

1) a) $\overline{X}=\frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7}X_i=13;\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$ où $V(X)=\frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7}x_i^2-\overline{X}^2=40$ alors $\sigma(X)=\sqrt{40}\approx 6,32$

b) $\overline{Y}=\frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7}Y_i=4;\sigma(Y)=\sqrt{V(Y)}$ où $V(Y)=\frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7}Y_i^2-\overline{Y}^2\approx 0,08$ alors $\sigma(Y)\approx 0,28$

2) $G(\overline{X},\overline{Y})\Leftrightarrow G(13,4)$

3) a) $G_1(\overline{X}_1,\overline{Y}_1);\overline{X}_1=\frac{4+6+9}{3}\approx 6,33$ et $\overline{Y}_1=\frac{3,7+3,75+3,8}{3}=3,75\Rightarrow G_1(6,33,3,75)$

$G_2(\overline{X}_2,\overline{Y}_2);\overline{X}_1=\frac{14+17+19+22}{4}=18$ et $\overline{Y}_2=\frac{3,9+4+4,35+4,5}{4}\approx 4,19\Rightarrow G_1(18,4,19)$

b- $Y=aX+b$ avec $a=\frac{\overline{Y}_2-\overline{Y}_1}{\overline{X}_2-\overline{X}_1}\approx 0,04;b=\overline{Y}_1-0,04\overline{X}_1\approx 3,5\Rightarrow Y=0,04X+3,5$.

4) On prend $X=30\Rightarrow Y=0,04\times 30+3,5=4,7kg$.

Exercice 2 :1)a) $f(0)=-\frac{3}{2}$

b)* $\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\mapsto+\infty}a+\underbrace{\boxed{\frac{b}{x}}}_{\to 0}+\underbrace{\boxed{\frac{c}{x(x-2)}}}_{\to 0}\Rightarrow a=-1$

*$\lim_{x\mapsto 2}(x-2)f(x)=\lim_{x\mapsto 2}\underbrace{(x-2)(ax+b)}_{\to 0}+c=c\Rightarrow c=3$

*$f(0)=b-\frac{c}{2}$ d'où le système : $\begin{cases}b-\frac{c}{2}=-\frac{3}{2}\\ a=-1\\ c=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\ b=0\\ c=3\end{cases}$

2) $D_f=\mathbb{R}\setminus\{2\}$; $\forall x\in D_f$ on a : $x\neq 2\Leftrightarrow -x\neq -2\Leftrightarrow 4-x\neq 2\Leftrightarrow(4-x)\in D_f$

Montrons que $f(4-x)+f(x)=-4$

On a : $f(x)=-x+\frac{3}{x-2}$

$f(4-x)+f(x)=-4+\cancel{x}+\cancel{\frac{3}{2-x}}+\cancel{(-x)}+\cancel{\frac{3}{x-2}}=-4$ Donc $I(2,-2)$ est un centre de symétrie pour ζ_f

3) $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)-y=\lim_{x\to\pm\infty}\cancel{-x}+\frac{3}{x-2}+\cancel{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3}{x-2}=0$ Donc $\Delta:y=-x$ est un asymptote oblique à (ζ_f)

4) $D_f=\mathbb{R}\setminus\{2\}$ f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$

$$f'(x)=\frac{(-2x+2)(x-2)-(-x^2+2x+3)}{(x-2)^2}=\frac{-2x^2+4x+\cancel{2x}-4+x^2-\cancel{2x}-3}{(x-2)^2}=\frac{-x^2+4x-7}{(x-2)^2}$$

$f'(x)=0\Leftrightarrow -x^2+4x-7=0,\ \Delta=b^2-4ac=16-28=-12<0$

Pas de racine donc $f'(x)$ prend le signe de $a=-1<0\Rightarrow f'(x)<0$

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(-x)=-\infty$

$\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{\overbrace{-x^2+2x+3}^{\to 3}}{\underbrace{x-2}_{\to 0^-}}=\frac{3}{0^-}=-\infty$ et $\lim_{x\to 2^+}f(x)=\frac{3}{0^+}=+\infty$

5)

x	0	1	2	3	4
f(x)	$-\frac{3}{2}$	-4		0	$-\frac{5}{2}$

x	0	1
y	0	-1

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f'(x)		-	‖	+	
f(x)	$+\infty$ ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$-\infty$

6)a) $Dg=\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$

$\forall x \in Dg : x \neq 2$ et $x \neq -2 \Leftrightarrow -x \neq -2$ et $-x \neq 2) \Leftrightarrow -x \in Dg$ et $g(-x) = -|-x| + \dfrac{3}{|-x|-2}$

$\Leftrightarrow g(-x) = -|x| + \dfrac{3}{|x|-2} = g(x)$ donc g est paire alors $(O, \vec{j})$ est un axe de symétrie pour (ζ_g) de plus si

$x \geq 0$ alors $g(x) = -x + \dfrac{3}{x-2} = f(x) \Rightarrow \zeta_g = \zeta_f$ d'où la construction de (ζ_g) (voir figure)

7) $M(x,y) \in (\zeta_f) \cap D_k \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{-x^2+2x+3}{x-2} \\ y = k \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{-x^2+2x+3}{x-2} = k \Leftrightarrow -x^2+2x+3 = kx-2k$

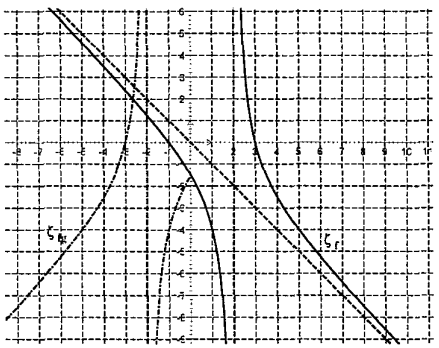
$\Leftrightarrow \boxed{-x^2+(2-k)x+3+2k=0} : (E)$

$\begin{cases} a=-1 \\ b=2-k \\ c=3+2k \end{cases} \Rightarrow \Delta_x = (2-k)^2 + 4(3+2k) = k^2+4k+16$

$\begin{cases} a'=1 \\ b'=4 \\ c'=16 \end{cases} \Rightarrow \Delta_k = 16-64 = -84 < 0$ Donc Δ_x prend le signe de $a' = 1 > 0 \Rightarrow \Delta_k > 0$

Donc (E) admet deux racines x' et x" alors $\zeta_f \cap D_k = \{M'(x',y'); M''(x'',y'')\}$

On pose



$I(x,y)$ on a $\begin{cases} x = \dfrac{x'+x''}{2} = \dfrac{s}{2} = \dfrac{\left(-\dfrac{b}{a}\right)}{2} = \dfrac{2-k}{2} \\ y = \dfrac{y'+y''}{2} = \dfrac{k+k}{2} = k \end{cases} \Leftrightarrow y = \dfrac{2-x}{2}$ donc l'ensemble des points I est la droite

$D : y = -\dfrac{1}{2}x + 1$

Exercice 3 : 1) $\text{card}(\Omega) = C_{12}^4 = 495$

$\text{card } A = C_4^2C_3^1C_5^1 + C_3^2C_4^1C_5^1 + C_5^2C_4^1C_3^1 = 270,\ P(A) = \dfrac{270}{495} = \dfrac{6}{11}$

$\text{card } B = C_4^4 + C_5^4 + C_4^2C_5^2 = 66\ \ P(B) = \dfrac{66}{495} = \dfrac{2}{15}$

$\text{card } C = C_4^4 + C_3^3C_9^1 = 10, P(C) = \dfrac{1}{495} = \dfrac{2}{99}$

$\text{card } D = C_1^1C_3^2C_6^1 + C_2^1C_3^1C_6^1 = 18+90 = 108\ \ P(D) = \dfrac{108}{495} = \dfrac{12}{55}$

2) $\text{card}\,\Omega = A_{12}^3 = 12 \times 11 \times 10 = 1320$

$\text{card } E = 3!A_4^1 \times A_3^1 \times A_5^1 = 360 \Rightarrow P(E) = \dfrac{360}{1320} = \dfrac{3}{11}$, $\text{card } F = \dfrac{3!}{2!}A_5^2 \times A_3^1 = 180 \Rightarrow P(F) = \dfrac{180}{1320} = \dfrac{3}{22}$

Pour $E \cap F$ il ya 3 cas $\begin{cases} B\ 0 & 1 & 1 \\ N\ 1 \text{ ou } 1 \text{ ou} & & 0 \\ R\ 1 & 0 & 1 \end{cases}$

$\text{card } E \cap F = 3!A_1^1 \times A_2^1 \times A_2^1 + 3!A_1^1 \times A_2^1 \times A_1^1 + 3!A_1^1 \times A_1^1 \times A_2^1 = 48 \Rightarrow P(E \cap F) = \dfrac{48}{1320} = \dfrac{2}{55}$

$P(E \cup F) = P(E') + P(F) - P(E \cap F) = \dfrac{3}{11} + \dfrac{3}{22} - \dfrac{2}{55}$

$E' = \overline{E} \Rightarrow P(E') = P(\overline{E}) = 1 - p(E) = 1 - \dfrac{3}{11} = \dfrac{8}{11}$

Exercice n°4 : 1) a) $(BC) = D_{(B,\overrightarrow{BC})} = \{M(x,y,z) \in \xi \text{ tel que} : \overrightarrow{BM} = \alpha\overrightarrow{BC}, \alpha \in \mathbb{R}\}$. $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \\ z_C - z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow (BC) \begin{cases} x = -1+3\alpha \\ y = -1+4\alpha, \alpha \in \mathbb{R}. \\ z = 2-4\alpha \end{cases}$

b) $\bullet \vec{u}_\Delta \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\dfrac{0}{3} = 0$ et $\dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{0}{3} \neq \dfrac{2}{4} \Rightarrow \vec{u}_\Delta$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas colinéaires donc Δ et (BC) ne sont pas parallèles. $\bullet\ \Delta$ et (BC) sont elles sécantes ?. Posons $M(x,y,z) \in \Delta$ et (BC) $\Rightarrow$

$\begin{cases} 1 = -1+3\alpha \\ -2+2t = -1+4\alpha \\ -1+2t = 2-4\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{2}{3} \\ -2+2t = -1+4\times\dfrac{2}{3} \\ -1+2t = 2-4\times\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{2}{3} \\ t = \dfrac{11}{6} \\ t = \dfrac{1}{6} \end{cases}$ ce qui est impossible donc Δ et (BC) ne sont pas sécantes donc Δ et (BC) ne sont pas coplanaires.

2) a) $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}3\\4\\-4\end{pmatrix}$. On a $\frac{-2}{3}\neq\frac{-1}{4}$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas colinéaires et par suite les points A, B et C déterminent un plan.

b) $(ABC)=\left\{M(x,y,z)\in\xi \text{ tel que : dét}\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AM}\right)=0\right\}$. dét$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AM}\right)=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}-2&3&x-1\\-1&4&y\\1&-4&z-1\end{vmatrix}=0$

$\Leftrightarrow(-8z+8+3y+4x-4)-(4x-4+8y+3z+3)=0\Leftrightarrow-5y-5z+5=0\Rightarrow(ABC):y+z-1=0$.

c)Posons

$$M(x,y,z)\in\Delta\cap(ABC)\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=-2+2t\\z=-1+2t\\y+z-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=-2+2t\\z=-1+2t\\-2+2t-1+2t-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=0\\z=1\\t=1\end{cases}\Rightarrow\Delta\cap(ABC)=\{A(1,0,1)\}$$

3) a) $P=P\left(B,\vec{u}_\Delta,\overrightarrow{AB}\right)=\left\{M(x,y,z)\in\xi \text{ tel que : dét}\left(\overrightarrow{AB},\vec{u}_\Delta,\overrightarrow{BM}\right)=0\right\}\Leftrightarrow\begin{vmatrix}-2&0&x+1\\-1&2&y+1\\1&2&z-2\end{vmatrix}=0$

$\Leftrightarrow(-4z+8+0-2x-2)-(2x+2-4y-4+0)=0\Leftrightarrow-4x+4y-4z+8=0$ donc $P:x-y+z-2=0$

b)$\Delta'=P\cap(ABC)\Rightarrow\Delta':\begin{cases}y+z-1=0\\x-y+z-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\Delta':\begin{cases}y=1-z\\x=3-2z\end{cases}$.on pose $z=\alpha$ on obtient $\Delta':\begin{cases}y=1-\alpha\\x=3-2\alpha\end{cases}\alpha\in\mathbb{R}$.

Exercice n°5 : voirEXERCICE17 :

Devoir de synthèse n 3 exempele2 :

Exercice n°1 : 1) a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-6\\6\\0\end{pmatrix},\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-6\\0\\6\end{pmatrix}$. On a : $\frac{0}{6}=0$ et $\frac{-6}{-6}=1\Rightarrow\frac{0}{6}\neq\frac{-6}{-6}$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et par suite A, B et C ne sont pas alignés.

b) Soit $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ un vecteur normal de P donc $\begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0\\\vec{n}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-6a+6b=0\\-6a+6c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b\\a=c\end{cases}$. On prend par exemple a = 1 donc $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Soit $M(x,y,z)\in P\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0\Leftrightarrow(x-6)+y+z=0\Leftrightarrow P:x+y+z-6=0$.

c) On a : $-2-2-2-6=-12\neq0\Rightarrow D\notin P$ donc A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

2) a) $\overrightarrow{OD}\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}=-2\vec{n}$ donc $\overrightarrow{OD}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires donc $(OD)\perp P$.

b) $M(x,y,z)\in(OD)\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\alpha\\y=-2\alpha;\alpha\in\mathbb{R}\\z=-2\alpha\end{cases}$

c) Soit H le projeté de O sur P. On a : $\begin{cases}\overrightarrow{OH}=\alpha\vec{n}\\H\in P\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\alpha\\y=\alpha\\z=\alpha\\x+y+z-6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\alpha\\y=\alpha\\z=\alpha\\\alpha+\alpha+\alpha-6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=2\\z=2\\\alpha=2\end{cases}$

$\Rightarrow H(2,2,2)$. $AH=BH=CH=\frac{\sqrt{123}}{2}\Rightarrow$ H est équidistant des points A, B et C.

d) $\left.\begin{array}{l}(OD)\perp P\\(OD)\cap P=\{H\}\\HA=HB=HC\end{array}\right\}\Rightarrow(OD)$ est l'axe de cercle circonscrit du triangle ABC.

3) a) Soit I le milieu de [CD] alors $I(-1,-1,2)\in Q$. $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-2\\-2\\-8\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de Q.

Soit $M(x,y,z)\in Q\Leftrightarrow\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{CD}=0\Leftrightarrow-2(x+1)-2(y+1)-8(z-2)=0\Leftrightarrow x+y+4z-6=0$. Une équation de Q.

4) $\vec{n}_Q\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de Q et $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de P. On a : $\frac{1}{1}\neq\frac{1}{4}$ donc P et Q sont sécants suivant une droite. Soit $M(x,y,z)\in P\cap Q\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+z-6=0\\x+y+4z-6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=0\\y=6-x\end{cases}$. On pose $x=\beta$, on obtient : $\boxed{P\cap Q:\begin{cases}x=\beta\\y=6-\beta;\ \beta\in\mathbb{R}\\z=0\end{cases}}$.

Exercice n°2 :1) $P(A)=\frac{C_4^3+C_5^3+C_3^3}{C_{12}^3}=\frac{4+10+1}{220}=\frac{15}{220}=\frac{3}{44}$. ; $P(B)=\frac{C_7^3+C_5^3}{C_{12}^3}=\frac{35+10}{220}=\frac{45}{220}=\frac{9}{44}$.

$C=A\cup B\Rightarrow p(C)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$ or $A\cap B$: « les trois représentantes choisis sont de même catégorie et de même sexe ». $P(A\cap B)=\frac{C_3^3+C_3^3}{C_{12}^3}=\frac{1+1}{220}=\frac{2}{220}=\frac{1}{110}$ donc $p(C)=\frac{3}{44}+\frac{9}{44}-\frac{1}{110}=\frac{29}{110}$.

$\overline{D}$: « il n'y a pas de médecin » donc $p(D)=1-p(\overline{D})=1-\frac{C_3^3}{C_{12}^3}=1-\frac{56}{220}=1-\frac{14}{55}=\frac{41}{55}$.

$P(E)=\frac{C_1^1\times C_4^2+C_3^1\times C_4^1\times C_4^1}{C_{12}^3}=\frac{1\times 6+3\times 4\times 4}{220}=\frac{54}{220}=\frac{27}{110}$.

2) $P(F)=\frac{C_9^3}{C_{12}^3}=\frac{84}{286}=\frac{42}{143}$. $P(G)=\frac{C_9^3+C_8^3}{C_{12}^3}=\frac{84+56}{286}=\frac{140}{286}=\frac{70}{143}$.

Exercice n°3 : 1) a) Voir figure. b)

$G(3,5;18,33)$

2) $\sigma(X)=1,70$ et $\sigma(Y)=6,25$.

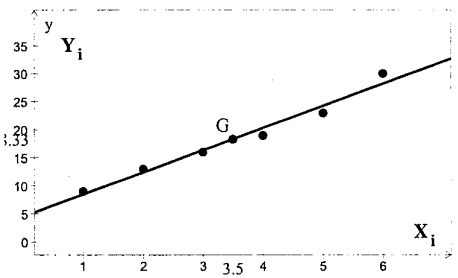
3) a) $G_1(2;12,66)$ et $G_2(5;24)$.

b) $(G_1G_2): y=ax+b$

avec : $a=\frac{y_{G_2}-y_{G_1}}{x_{G_2}-x_{G_1}}=3,78$

et $b=y_{G_1}-ax_{G_1}=5,1$ donc

$(G_1G_2): y=3,78x+51$



c) Pour l'année 2015 le rang correspondant est x = 13 donc le chiffre d'affaires est $y=3,78\times 13+51=54,24$

Exercice n°4 : 1) a) $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2$. $f'(x)=-a\sin x+b\cos x \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$.

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2 \Leftrightarrow a\cos\frac{\pi}{6}+b\sin\frac{\pi}{6}=2 \Leftrightarrow a\sqrt{3}+b=4$.

$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=0 \Leftrightarrow -a\sin\frac{\pi}{6}+b\cos\frac{\pi}{6}=0 \Leftrightarrow -a+b\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow a=b\sqrt{3}$ donc $3b+b=4 \Rightarrow b=1$ et $a=\sqrt{3}$.

b) $2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=2\left(\cos x.\cos\frac{\pi}{6}+\sin x.\sin\frac{\pi}{6}\right)=2\left(\cos x.\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin x.\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}\cos x+\sin x=f(x)$.

c) $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=2\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=2\cos\frac{\pi}{2}=0$ donc le signe de f(x) est :

x	$\frac{\pi}{6}$		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{7\pi}{6}$
Signe de f(x)		+	0	−	

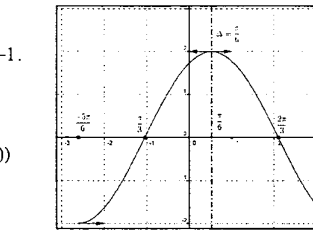
2) a) $\forall x\in\mathbb{R}, \left(x-\frac{\pi}{3}\right)\in\mathbb{R}$ et $f\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{3}-x-\frac{\pi}{6}\right)$

$=2\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=f(x)$ donc $\Delta: x=\frac{\pi}{3}$ est un axe de symétrie de ζ_f. b) f est périodique de période $T=\frac{2\pi}{1}=2\pi$ et comme $\Delta: x=\frac{\pi}{3}$ est un axe de symétrie de ζ_f alors il suffit d'étudier f sur un intervalle d'amplitude π dont l'un des extrémité est $\frac{\pi}{6}$ par exemple $\left[\frac{\pi}{6};\frac{7\pi}{6}\right]$.

4) ζ_f est l'union des images de ζ_0 par les translations des vecteurs $2k\pi\vec{i}$ avec k varie sur $\mathbb{R}$.

5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\sqrt{3}}{x-\frac{\pi}{3}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}=f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-1$.

$\lim\limits_{x\to\left(\frac{2\pi}{3}\right)^-}\frac{\sin x}{f(x)}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{0^+}=+\infty$ (Voir le tableau de signe de f(x))



Exercice N°5 : 1) a) Soit $n\geq 1$. Pour tout entier naturel k tel que $1\leq k\leq n$, on a

$\frac{1}{2n}\leq\frac{1}{n+k}\leq\frac{1}{n+1}\Rightarrow n\times\frac{1}{2n}\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\leq n\times\frac{1}{n+1}\Rightarrow\frac{1}{2}\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\leq\frac{n}{n+1}$

b) Soit $n\geq 1$ D'après la question précédente $\frac{1}{2n}\leq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\leq\frac{1}{n+1}\Rightarrow\frac{1}{2n}\leq a_n\leq\frac{1}{n+1}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2n}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$.

2) a) Soit $u: x\mapsto\sin x-x$; u est dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et $u'(x)=\cos x-1; x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$; Comme

$u'(x)\leq 0\Rightarrow$ u est décroissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ en plus $u(0)=0\Rightarrow$ pour tout réel $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$; $u(x)\leq 0$

$\Rightarrow\sin x\leq x; x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

b) Soit $v: x\mapsto 1-\frac{x^2}{2}-\cos x; x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$; $v'(x)=-x+\sin x=u(x)\Rightarrow$ v est décroissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

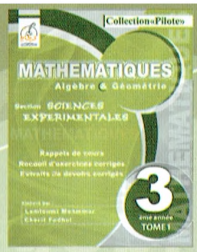
$v(0)=0\Rightarrow v(x)\leq 0; x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow 1-\frac{x^2}{2}\leq\cos x; x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

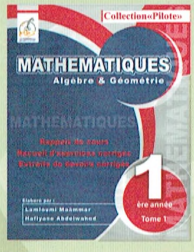
3) Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et k un entier tel que $1\leq k\leq n\Rightarrow n+k\geq 2$ et $\frac{1}{\sqrt{n+k}}\leq\frac{1}{\sqrt{2}}$. Or $\frac{1}{\sqrt{2}}<\frac{\pi}{2}$

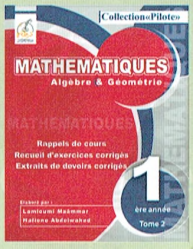
$\Rightarrow 1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right)^2\leq\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right)\leq 1\Rightarrow 1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+k}\right)\leq\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right)\leq 1$

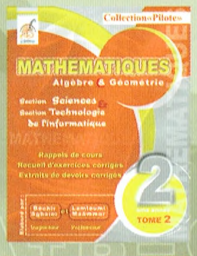
$\Rightarrow\quad n-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n+k}\right)\leq\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right)\leq n\Rightarrow 1-\frac{1}{2}a_n\leq U_n\leq 1$.

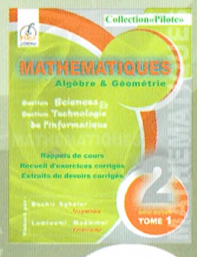
Or $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=1$.

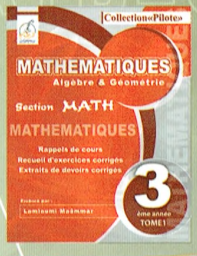


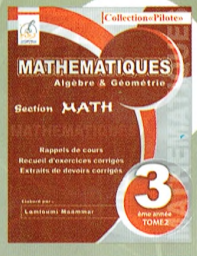


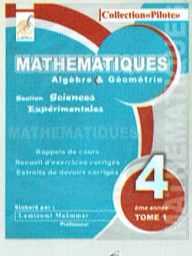












9 789973 561312

ISBN: 978-9973-56-131-2

8Dt:500

قرطاج
Carthage
للنشر والتوزيع

نهج حمّود عمارة أنيس 3000 صفاقس
الهاتف 117 222 74 227 987
فاكس 855 200 74
الجوّال 721 418 98 469 677 97

مطبعة التسفير الفني
الهاتف : 30 20 43 74 216

Concept : Talent - 97 677 457

Collection «Pilote»

MATHEMATIQUES

A+B=C